

Mit der Integraldarstellung der Funktion ${}_1F_1(\alpha, \beta, \gamma)$ folgt

$${}_1F_1(\alpha, \beta, z) - 1 = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^1 (e^{uz} - 1) u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-\alpha-1} du,$$

d. h.
$$\int ({}_1F_1 - 1) \frac{dl}{l^2} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 (1-u)^{-1/2} (e^{-\gamma(l/2)u} - 1) \frac{dl}{l^2} du.$$

Mit $p = \sqrt{\gamma u/2}$ ergibt die Integration über dl

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-u)^{-1/2} [(1/\varepsilon) e^{-p^2/\varepsilon^2} - 1/\varepsilon - p\sqrt{\pi} (1 - \Phi(\varepsilon p))] du \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \sqrt{\gamma/2} \int_0^1 (\sqrt{u}/\sqrt{1-u}) du. \end{aligned}$$

Das Integral ist einfach auszuwerten und ergibt: $I = -\frac{1}{4} \sqrt{\pi^3} \sqrt{\gamma/2}$.

Man sieht leicht, daß durch die Subtraktion von 1 gerade die Divergenzen vermieden werden.

Erzeugung elektromagnetischer Wellen in Plasmen durch Streuung longitudinaler Plasmawellen an longitudinalen Plasmawellen

R. WAGNER

Institut für Theoretische Physik und Sternwarte der Universität Kiel

(Z. Naturforschg. **22 a**, 1372—1391 [1967]; eingegangen am 14. März 1967)

Special interactions of plasma waves are examined in a plasma consisting of protons and electrons in thermodynamic equilibrium. Collisions of particles are neglected. We compute the following two cases: a) interaction of two plane plasma electron waves with each other; b) interaction of one plane plasma electron wave with the thermal fluctuations of the plasma which are represented by thermal plasma electron and ion waves. The electric field originating from the interactions is described by an equation obtained from the system of the MAXWELL-VLASOV-equations for protons and electrons. This equation is solved for the transverse electric field at large distances assuming that the potential energy gained by an electron in the plasma waves is small compared with its thermal energy. For case a) electromagnetic radiation is emitted near $2\omega_{pe}$ where ω_{pe} is the electron plasma frequency. For case b) the thermal plasma ion waves yield radio emission close to ω_{pe} , whereas the thermal plasma electron waves yield emission close to $2\omega_{pe}$. The intensities and scattering cross sections for case b) are compared with the results of other authors.

Die Entstehung elektromagnetischer Wellen in einem Plasma ist in den letzten Jahren — besonders im Hinblick auf die solaren Radiobursts¹ — häufig diskutiert worden. Die Untersuchung der Bursts vom Typ II und III² im m-Wellengebiet führt auf die Frage, unter welchen Bedingungen ein Plasma elektromagnetische Energie abstrahlt in nur einem oder höchstens zwei schmalen Frequenzbändern von wenigen MHz Breite, deren mittlere Frequenzen in der

Nähe der Plasmafrequenz ω_{pe} liegen und sich im Fall zweier Bänder nahezu wie 1 : 2 verhalten. Wegen des Auftretens von ω_{pe} liegt es nahe, die Emission mit Plasmawellen in Verbindung zu bringen. Dann ist jedoch zu klären, wie diese longitudinalen Plasmawellen transversale elektromagnetische Wellen aussenden können. In linearer Näherung kompensieren sich Leitungs- und Verschiebungsstrom einer Plasmawelle. Daher ist zur Emission von

¹ J. P. WILD, S. F. SMERD u. A. A. WEISS, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **1**, 291 [1963].

² J. P. WILD u. C. C. MCCREADY, Australian J. Sci. Res. (A) **3**, 387 [1950].



Radiowellen ein zusätzlicher, von einem Magnetfeld begleiteter, rotatorischer Strom notwendig. Die Entstehung dieses Stromes ohne Berücksichtigung eines äußeren Magnetfeldes kann erklärt werden: 1. durch Nichtlinearität der Plasmawelle³⁻⁵; 2. durch Wechselwirkung linearer Plasmawellen mit einer makroskopischen Inhomogenität^{6,7}, die im Grenzfall als Dichtediskontinuität behandelt wird⁸; 3. durch die Wechselwirkung der Plasmawelle mit mikroskopischen Inhomogenitäten⁹⁻¹¹. Die Frequenzen der Strahlung liegen bei den Prozessen der ersten Art bei $2\omega_{pe}$, $3\omega_{pe}$ etc., bei denen der zweiten Art bei ω_{pe} und bei denen der dritten Art bei ω_{pe} und $2\omega_{pe}$.

Nur Prozesse der dritten Art scheinen also eine natürliche Erklärung der solaren Bursts vom Typ II und III zu liefern. Daher wird in der folgenden Arbeit, von den Gedankengängen von GINZBURG und ZHELEZNIKOV⁹ ausgehend, ein neuer „mikroskopischer“ Mechanismus diskutiert, der als „Streuung von Plasmawellen an thermischen Plasmawellen“ bezeichnet werden kann.

I. Mechanismus

Zugrunde gelegt wird ein vollständig ionisiertes Protonen-Elektronenplasma, das sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet und in dem Stöße vernachlässigt werden können. Äußere Kraftfelder sollen nicht vorhanden sein. Die thermischen Dichteschwankungen dieses Plasmas sind mit elektrischen Feldern verknüpft. Daher liegt es nahe, sie durch ein FOURIER-Spektrum von Plasmawellen darzustellen, die im folgenden wegen ihrer Herkunft kurz als thermische (Plasma-)Wellen bezeichnet werden. Plasmawellen sind ein kollektives Phänomen, so daß ihre Wellenlänge nicht kleiner als die

DEBYE-Länge werden kann. Deswegen läßt sich der kurzwellige Teil der Dichteschwankungen im Spektrum von Plasmawellen nicht erfassen; er wird im folgenden vernachlässigt.

Die thermischen Wellen setzen sich zusammen aus Plasmaelektronen- und Plasmaionenwellen. Die einen werden von Elektronen, die anderen von Ionen getragen. Plasmaionenwellen haben also, verglichen mit ω_{pe} , sehr niedrige Frequenzen. Deshalb darf bei ihrer Behandlung die Mitbewegung der Elektronen nicht vernachlässigt werden. Dagegen ist für die Plasmaelektronenwellen die Ionenmitbewegung wegen der großen Ionenmasse unwichtig. Hieraus folgt, daß die Schwankungen der Ionendichte allein durch die thermischen Ionenwellen beschrieben werden, während die der Elektronendichte in beiden Wellentypen auftreten. Die charakteristischen Zeiten der beiden Komponenten differieren jedoch stark.

In dieses Plasma falle eine ebene Plasmaelektronenwelle ein; ihre Anregung werde als gegeben hingenommen. Trifft diese Welle auf eine zweite, schon vorher im Plasma vorhandene, ebene Plasmaelektronenwelle, so findet eine Wechselwirkung statt. Insbesondere entstehen zusätzliche Ströme, da auf die Raumladungsschwankungen in der einen Welle das Geschwindigkeits- und elektrische Feld der anderen wirken und umgekehrt. Es resultiert eine „Streustrahlung“, die z. Tl. wieder aus longitudinalen Plasmaelektronenwellen, z. Tl. aber aus transversalen elektromagnetischen Wellen besteht. Nur letztere werden im folgenden näher betrachtet. — In entsprechender Weise tritt eine ebene Plasmaelektronenwelle mit den thermischen Wellen in Wechselwirkung, und es entsteht wieder eine elektromagnetische Strahlung.

II. Herleitung der den Streuprozess beschreibenden Gleichung

Zur Behandlung des Streuprozesses werden folgende Ausgangsgleichungen benutzt: die VLASOV-Gleichungen für Protonen und Elektronen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) F_e - \frac{e}{m} \left(\mathcal{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathcal{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_e = 0, \quad (1)$$

³ D. A. TIDMAN u. G. H. WEISS, Phys. Fluids **4**, 866 [1961].

⁴ G. BURKHARDT, CH. FAHL u. R. W. LARENZ, Z. Phys. **161**, 380 [1961].

⁵ R. W. LARENZ, Symposium on Electromagnetic Theory and Antennas, Copenhagen 1962, Pergamon Press, New York 1963, p. 349.

⁶ D. A. TIDMAN u. G. H. WEISS, Phys. Fluids **4**, 703 [1961].

⁷ M. H. COHEN, Phys. Rev. **126**, 389 [1962].

⁸ A. H. KRITZ u. D. MINTZER, Phys. Rev. **117**, 382 [1960].

⁹ V. L. GINZBURG u. V. V. ZHELEZNIKOV, Soviet Astron. — A. J. **2**, 653 [1958].

¹⁰ Y. TERASHIMA u. N. YAZIMA, Nagoya University, Institute of Plasma Physics, Research Report IPPJ-9 [1963].

¹¹ P. A. STURROCK, R. H. BALL u. D. E. BALDWIN, Phys. Fluids **8**, 1509 [1965].

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) F_i + \frac{e}{M} \left(\mathfrak{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathfrak{B}\right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_i = 0 \quad (2)$$

und die MAXWELL-Gleichungen: $\text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \quad (3)$

$$\text{rot } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} e \int \mathbf{v} (F_i - F_e) d^3v, \quad (4)$$

$$\text{div } \mathfrak{E} = 4\pi e \int (F_i - F_e) d^3v, \quad (5) \quad \text{div } \mathfrak{H} = 0. \quad (6)$$

Dabei bedeuten: \mathfrak{E} das gesamte im Plasma vorhandene elektrische Feld, \mathfrak{H} das im Plasma existierende Magnetfeld, F_e die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion der Elektronen. (In F_e sind also alle Störungen der Gleichgewichtsverteilung enthalten.) F_i die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion der Protonen, e die Elementarladung, c die Vakuumlichtgeschwindigkeit, m , M die Elektronen- bzw. Protonenmasse, und es ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, da die Permeabilität des Plasmas gleich 1 gesetzt wird.

Aus (3) und (4) ergibt sich:

$$\text{rot rot } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} e \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{v} (F_i - F_e) d^3v. \quad (7)$$

Definiert man in bekannter Weise:

$$N_j = \int F_j d^3v; \quad \bar{v}_j = (1/N_j) \int \mathbf{v} F_j d^3v; \quad \mathbf{P}_j = m_j \int (\bar{v} - v_j) (\bar{v} - v_j) F_j d^3v \quad j = i, e; \quad m_i = M, \quad m_e = m$$

und benutzt die aus (1) und (2) durch sofortige Integration folgenden Kontinuitätsgleichungen, so erhält man für den zweiten Term der rechten Seite von (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{v} (F_i - F_e) d^3v &= \left(\frac{e}{M} N_i + \frac{e}{m} N_e\right) \mathfrak{E} - \int \mathbf{v} \left[\left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathfrak{B}\right) \cdot \left(\frac{e}{M} \nabla_{\mathbf{v}} F_i + \frac{e}{m} \nabla_{\mathbf{v}} F_e\right)\right] d^3v \\ &+ \frac{1}{m} \text{div } \mathbf{P}_e - \bar{v}_e \frac{\partial N_e}{\partial t} + N_e (\bar{v}_e \cdot \text{grad}) \bar{v}_e - \frac{1}{M} \text{div } \mathbf{P}_i + \bar{v}_i \frac{\partial N_i}{\partial t} - N_i (\bar{v}_i \cdot \text{grad}) \bar{v}_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Wir zerlegen $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_L + \mathfrak{E}_T$ in den transversalen und longitudinalen Anteil \mathfrak{E}_T und \mathfrak{E}_L , so daß $\text{div } \mathfrak{E} = \text{div } \mathfrak{E}_L$ und $\text{rot } \mathfrak{E} = \text{rot } \mathfrak{E}_T$ gelten.

Bezeichnet n_0 die Gleichgewichtsdichte von Protonen und Elektronen, so sind die entsprechenden Plasmafrequenzen:

$$\omega_{pi}^2 = 4\pi e^2 n_0 / M \quad \text{und} \quad \omega_{pe}^2 = 4\pi e^2 n_0 / m$$

Damit folgt aus (7) und (8):

$$\begin{aligned} c^2 \Delta \mathfrak{E}_T - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathfrak{E}_T + \mathfrak{E}_L) &- \left(\omega_{pi}^2 \frac{N_i}{n_0} + \omega_{pe}^2 \frac{N_e}{n_0}\right) (\mathfrak{E}_T + \mathfrak{E}_L) \\ &= (4\pi e/m) \text{div } \mathbf{P}_e - (4\pi e/M) \text{div } \mathbf{P}_i - \bar{v}_e \frac{\partial (4\pi e N_e)}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial (4\pi e N_i)}{\partial t} \\ &+ 4\pi e N_e \text{grad } \frac{1}{2} \bar{v}_e^2 - 4\pi e N_i \text{grad } \frac{1}{2} \bar{v}_i^2 - 4\pi e N_e \bar{v}_e \times \text{rot } \bar{v}_e + 4\pi e N_i \bar{v}_i \times \text{rot } \bar{v}_i \\ &- \frac{1}{n_0} \int \mathbf{v} \left[\left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathfrak{B}\right) \cdot \left(\omega_{pi}^2 \nabla_{\mathbf{v}} F_i + \omega_{pe}^2 \nabla_{\mathbf{v}} F_e\right)\right] d^3v. \end{aligned} \quad (9)$$

Vernachlässigt man die Rückwirkung des Streuprozesses auf die Wellen im Plasma, so fallen die letzten 3 Glieder der rechten Seite von (9) weg, wenn man berücksichtigt, daß kein äußeres Magnetfeld vorhanden ist, \mathfrak{B} also nur durch Wechselwirkungen entstanden sein kann. Ebenso wird bei Vernachlässigung der Rückwirkung $\text{div } \mathbf{P}_j$ ($j = i, e$) rotationsfrei, da in diesen Term dann nur die linearen longitudinalen Plasmawellen eingehen. Daher ist diese Größe für die Berechnung der transversalen Komponente \mathfrak{E}_T des elektrischen Feldes unwichtig. Zur Abschätzung ihrer Bedeutung für die longitudinale Komponente \mathfrak{E}_L betrachten wir etwa den Tensor \mathbf{P}_e für die Elektronen. Dieser läßt sich $p_0(\delta_{ik}) + \mathbf{P}_1$ schreiben, wobei p_0 der isotrope Gleichgewichtselektronendruck und \mathbf{P}_1 der Tensor auf Grund der einfallenden Plasmawellen ist. Benutzen wir die Low-Temperature-Approximation $v_{ph} \gg v_T$, wobei v_{ph} eine für die Wellen charakteristische Ge-

schwindigkeit, v_T die thermische Elektronengeschwindigkeit ist, so können wir mit BERNSTEIN und TREHAN¹² (unter Anwendung von Formel 26 und 27 der zitierten Arbeit) schreiben:

$$\operatorname{div} \mathbf{P}_e = \operatorname{div} \mathbf{P}_i = (3 p_0 / n_0) \operatorname{grad} N_e.$$

Das bedeutet wegen der Linearität der Wellen, daß wir in diesem Zusammenhang formal $\operatorname{div} \mathbf{P}_e = \operatorname{grad} p_e$ annehmen dürfen, wobei p_e und N_e durch $p_e = \operatorname{const} N_e^3$ gekoppelt sind. In entsprechendem Sinn schreiben wir

$$\operatorname{div} \mathbf{P}_i = \operatorname{grad} p_i.$$

Damit lautet die Differentialgleichung, aus der sich der elektrische Vektor \mathfrak{E}_T der elektromagnetischen Strahlung berechnen läßt:

$$\begin{aligned} c^2 \Delta \mathfrak{E}_T - \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_T}{\partial t^2} - \left(\omega_{pi}^2 \frac{N_i}{n_0} + \omega_{pe}^2 \frac{N_e}{n_0} \right) \mathfrak{E}_T - \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_L}{\partial t^2} - \left(\omega_{pi}^2 \frac{N_i}{n_0} + \omega_{pe}^2 \frac{N_e}{n_0} \right) \mathfrak{E}_L \\ = \frac{1}{e n_0} \operatorname{grad} (\omega_{pe}^2 p_e - \omega_{pi}^2 p_i) - \bar{v}_e \frac{\partial (4 \pi e N_e)}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial (4 \pi e N_i)}{\partial t} + 4 \pi e N_e \operatorname{grad} \frac{1}{2} \bar{v}_e^2 - 4 \pi e N_i \operatorname{grad} \frac{1}{2} \bar{v}_i^2 \end{aligned} \quad (10)$$

III. Strahlung bei $2 \omega_{pe}$ infolge Wechselwirkung von zwei ebenen Plasmaelektronenwellen

Die Gl. (10) soll zunächst dazu benutzt werden, die Wechselwirkung von zwei ebenen Plasmaelektronenwellen zu untersuchen. Für diesen Fall wird die Reaktion der Ionen auf die Plasmawellen vernachlässigt, d. h. wir setzen $p_i = \operatorname{const}$, $N_i = n_0$, $\bar{v}_i = 0$.

Mit $\Omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2$ folgt aus (10):

$$\begin{aligned} \left(c^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Omega_p^2 \right) \mathfrak{E}_T - \omega_{pe}^2 \frac{N_e - n_0}{n_0} \mathfrak{E}_T - \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_L}{\partial t^2} - \Omega_p^2 \mathfrak{E}_L - \omega_{pe}^2 \frac{N_e - n_0}{n_0} \mathfrak{E}_L \\ = \frac{1}{e n_0} \omega_{pe}^2 \operatorname{grad} p_e - \bar{v}_e \frac{\partial (4 \pi e N_e)}{\partial t} + 4 \pi e N_e \operatorname{grad} \frac{1}{2} \bar{v}_e^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Setzt man $\operatorname{div} \mathfrak{E} = -4 \pi e (N_e - n_0)$, so folgt:

$$\begin{aligned} \left(c^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Omega_p^2 \right) \mathfrak{E}_T - \frac{1}{e n_0} \omega_{pe}^2 \operatorname{grad} p_e - \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_L}{\partial t^2} - \Omega_p^2 \mathfrak{E}_L \\ = - \frac{e}{m} \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} + \bar{v}_e \operatorname{div} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4 \pi e n_0 \operatorname{grad} \frac{1}{2} \bar{v}_e^2 - \operatorname{div} \mathfrak{E} \operatorname{grad} \frac{1}{2} \bar{v}_e^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Die linke Seite der Gleichung besteht aus den Wellengleichungen für die Transversalkomponente und die Longitudinalkomponente des elektrischen Feldes. (Wegen $p_e \sim N_e^3$ gilt: $\operatorname{grad} p_e \sim \operatorname{grad} N_e \sim \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{E}_L \sim \Delta \mathfrak{E}_L$; denn wegen $\operatorname{rot} \mathfrak{E}_L = 0$ ist $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{E}_L = \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathfrak{E}_L$.) Auf der rechten Seite steht der Quellterm für die bei der Wechselwirkung entstehende Strahlung. Seine Rotation und seine Divergenz sind im allgemeinen von Null verschieden. Darin kommt unmittelbar zum Ausdruck, daß bei dem Prozeß Plasma- und Radiowellen entstehen. Das elektrische Feld \mathfrak{E} besteht aus 3 Anteilen: dem transversalen Streufeld \mathfrak{E}_T , dem longitudinalen Streufeld \mathfrak{E}_{L1} und dem longitudinalen Feld \mathfrak{E}_{L0} der einfallenden Wellen, $\mathfrak{E}_L = \mathfrak{E}_{L1} + \mathfrak{E}_{L0}$. Wenn wir wieder die Rückwirkung des Streufeldes auf den Quellterm vernachlässigen und $(\partial/\partial t) \mathfrak{E}_{L0} - 4 \pi e N_e \cdot \bar{v}_e = 0$ berücksichtigen, folgt:

$$\begin{aligned} \left(c^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Omega_p^2 \right) \mathfrak{E}_T - \frac{1}{e n_0} \omega_{pe}^2 \operatorname{grad} p_e - \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_L}{\partial t^2} - \Omega_p^2 \mathfrak{E}_L \\ = - \frac{e}{m} \mathfrak{E}_{L0} \operatorname{div} \mathfrak{E}_{L0} + 1/4 \pi e N_e \mathfrak{E}_{L0} \operatorname{div} \mathfrak{E}_{L0} \\ - \operatorname{div} \mathfrak{E}_{L0} \operatorname{grad} \left\{ \frac{1}{2} \mathfrak{E}_{L0}^2 (4 \pi e N_e)^{-2} \right\} + 4 \pi e n_0 \operatorname{grad} \left\{ \frac{1}{2} \mathfrak{E}_{L0}^2 (4 \pi e N_e)^{-2} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Dabei wurde rechts $\partial \mathfrak{E}_{L0} / \partial t = \mathfrak{E}_{L0}$ abgekürzt.

¹² I. B. BERNSTEIN u. S. K. TREHAN, Nucl. Fusion **1**, 3 [1960].

Für den elektromagnetischen Streuanteil ist der letzte Term der rechten Seite unwichtig, da seine Rotation verschwindet. Eine Reihenentwicklung für die Funktionen N_e^{-1} bzw. N_e^{-2} mit dem Entwicklungsparameter $|(N_e - n_0)/n_0| < 1$ ergibt auf der rechten Seite von (13) ohne den letzten Term:

$$\begin{aligned} & -\frac{e}{m} \mathfrak{E}_{L0} \operatorname{div} \mathfrak{E}_{L0} + \frac{1}{4\pi e n_0} \dot{\mathfrak{E}}_{L0} \operatorname{div} \dot{\mathfrak{E}}_{L0} - \frac{N_e - n_0}{n_0} \frac{1}{4\pi e n_0} \dot{\mathfrak{E}}_{L0} \operatorname{div} \dot{\mathfrak{E}}_{L0} \\ & - \frac{1}{32\pi^2 e^2 n_0^2} \operatorname{div} \mathfrak{E}_{L0} \operatorname{grad} \dot{\mathfrak{E}}_{L0}^2 + \left(\frac{N_e - n_0}{n_0}\right)^2 \frac{1}{4\pi e n_0} \dot{\mathfrak{E}}_{L0} \operatorname{div} \dot{\mathfrak{E}}_{L0} + \frac{1}{16\pi^2 e^2 n_0^2} \operatorname{div} \mathfrak{E}_{L0} \operatorname{grad} \left(\dot{\mathfrak{E}}_{L0}^2 \frac{N_e - n_0}{n_0}\right) - + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Da $N_e - n_0 = -(1/4\pi e) \operatorname{div} \mathfrak{E}_{L0}$, besteht (14) aus Gliedern 2., 3. etc. Ordnung in \mathfrak{E}_{L0} . Für Plasmawellen ist die DEBYE-Länge $\lambda_D = \sqrt{\kappa T / 4\pi n_0 e^2}$ (T = Plasmatemperatur, κ = BOLTZMANN-Konstante) eine charakteristische Länge, die Plasmafrequenz ω_{pe} eine charakteristische Frequenz; ferner bezeichne E_0 eine charakteristische Feldstärke.

Jedes der beiden Glieder 2. Ordnung in \mathfrak{E}_{L0} ist von der Größenordnung $e |\mathfrak{E}_{L0}|^2 \omega_{pe}^{-2} (E_0 m \lambda_D)^{-1}$, jedes der beiden Glieder 3. Ordnung von der Größenordnung $|\mathfrak{E}_{L0}|^3 (4\pi e n_0 \lambda_D)^{-2} E_0^{-1}$. Will man nur quadratische Glieder berücksichtigen, so muß also gelten:

$$|\mathfrak{E}_{L0}| \ll 4\pi e n_0 \lambda_D. \quad (15)$$

Das heißt also, wenn $|\mathfrak{E}_{L0}|$ durch ψ/λ_D abgeschätzt wird (ψ = gesamtes elektrisches Potential der in Wechselwirkung tretenden Plasmawellen):

$$\chi = e\psi/\kappa T \ll 1. \quad (16)$$

Aus (15) erkennt man unmittelbar, daß das der Forderung $|(N_e - n_0)/n_0| \ll 1$ äquivalent ist. (16) besagt: Solange die potentielle Energie, die ein Elektron im Plasma gewinnt, klein gegen seine mittlere thermische Energie ist, braucht man nur die quadratischen Glieder zu berücksichtigen.

$\mathfrak{E}_{L0} = \mathfrak{e}_0 + \mathfrak{e}_1$ setzt sich zusammen aus den Feldern \mathfrak{e}_0 und \mathfrak{e}_1 der beiden betrachteten Wellen, wobei wir für diese ebenen Wellen

$$\mathfrak{e}_0 = (\mathfrak{f}/k) \frac{1}{2} U_0 \{e^{i(\mathfrak{f} \cdot \mathbf{r} - \Omega_0 t)} + e^{-i(\mathfrak{f} \cdot \mathbf{r} - \Omega_0 t)}\}, \quad \mathfrak{e}_1 = \frac{\mathfrak{l}}{l} \frac{1}{2} U_1 \{e^{i(\mathfrak{l} \cdot \mathbf{r} - \Omega_1 t)} + e^{-i(\mathfrak{l} \cdot \mathbf{r} - \Omega_1 t)}\} \quad (17)$$

schreiben können. Dabei sind U_0, U_1 die elektrischen Feldamplituden, $\mathfrak{f}, \mathfrak{l}$ die Wellenvektoren und Ω_0, Ω_1 die Frequenzen der Wellen.

Unter der Voraussetzung $\chi \ll 1$ wird aus (12):

$$\begin{aligned} & \left(c^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Omega_p^2\right) \mathfrak{E}_T - (1/e n_0) \operatorname{grad} (\omega_{pe}^2 p_e) - \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_L}{\partial t^2} - \Omega_p \mathfrak{E}_L \\ & = (1/4\pi e n_0) (\dot{\mathfrak{e}}_0 \operatorname{div} \dot{\mathfrak{e}}_0 + \dot{\mathfrak{e}}_1 \operatorname{div} \dot{\mathfrak{e}}_0 + \dot{\mathfrak{e}}_0 \operatorname{div} \dot{\mathfrak{e}}_1 + \dot{\mathfrak{e}}_1 \operatorname{div} \dot{\mathfrak{e}}_1) \\ & = (e/m) (\mathfrak{e}_0 \operatorname{div} \mathfrak{e}_0 + \mathfrak{e}_1 \operatorname{div} \mathfrak{e}_0 + \mathfrak{e}_0 \operatorname{div} \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_1 \operatorname{div} \mathfrak{e}_1) + 4\pi e n_0 \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathfrak{E}}_{L0}^2 [4\pi e N_e]^{-2}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Für \mathfrak{E}_T folgt eine Differentialgleichung, wenn im Quellterm auf der rechten Seite nur die rotatorischen Anteile — Index T — berücksichtigt werden:

$$\left(c^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Omega_p^2\right) \mathfrak{E}_T = - (e/m) (\mathfrak{e}_1 \operatorname{div} \mathfrak{e}_0 + \mathfrak{e}_0 \operatorname{div} \mathfrak{e}_1)_T + \left(\frac{1}{4\pi e n_0}\right) (\dot{\mathfrak{e}}_1 \operatorname{div} \dot{\mathfrak{e}}_0 + \dot{\mathfrak{e}}_0 \operatorname{div} \dot{\mathfrak{e}}_1)_T \quad (19)$$

da $\mathfrak{e}_0 \operatorname{div} \mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_1 \operatorname{div} \mathfrak{e}_1, \dot{\mathfrak{e}}_0 \operatorname{div} \dot{\mathfrak{e}}_0$ und $\dot{\mathfrak{e}}_1 \operatorname{div} \dot{\mathfrak{e}}_1$ keinen rotatorischen Anteil besitzen. Wir betrachten zunächst den Vektor

$$\mathfrak{S}_1 = (1/4\pi) (\mathfrak{e}_1 \operatorname{div} \mathfrak{e}_0 + \mathfrak{e}_0 \operatorname{div} \mathfrak{e}_1). \quad (20)$$

Mit den Ansätzen für $\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_1$ gemäß (17) folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 = & (i/4\pi) \cdot \frac{1}{4} U_0 U_1 \left[\left\{ \mathfrak{l}(k/l) + \mathfrak{f}(l/k) \right\} \left\{ e^{i[(\mathfrak{f}+\mathfrak{l}) \cdot \mathbf{r} - (\Omega_0+\Omega_1)t]} - e^{-i[(\mathfrak{f}+\mathfrak{l}) \cdot \mathbf{r} - (\Omega_0+\Omega_1)t]} \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ \mathfrak{f}(l/k) - \mathfrak{l}(k/l) \right\} \left\{ e^{i[(\mathfrak{l}-\mathfrak{f}) \cdot \mathbf{r} - (\Omega_1-\Omega_0)t]} - e^{-i[(\mathfrak{l}-\mathfrak{f}) \cdot \mathbf{r} - (\Omega_1-\Omega_0)t]} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

(20) zeigt, daß \mathfrak{S}_1 ein Kraftdichtevektor ist, der folgendermaßen zustande kommt: Die Raumladungsdichteschwankungen $(1/4\pi) \operatorname{div} \mathfrak{e}_0$ der einen Welle werden durch das elektrische Feld \mathfrak{e}_1 der anderen Welle

beeinflusst und umgekehrt. Gemäß (21) entstehen infolge dieser Wechselwirkung zwei „Kraftdichtewellen“. Die eine läuft mit der Frequenz $\Omega_1 + \Omega_0$ in die Richtung $\mathbf{\hat{f}} + \mathbf{\hat{l}}$, die andere mit der Frequenz $\Omega_1 - \Omega_0$ in die Richtung $\mathbf{\hat{l}} - \mathbf{\hat{f}}$.

Für die Welle mit der Frequenz $\Omega_1 + \Omega_0$ folgt aus der Darstellung (21), daß der Kraftdichtevektor im allgemeinen weder senkrecht noch parallel zur Ausbreitungsrichtung $(\mathbf{\hat{f}} + \mathbf{\hat{l}})$ schwingt. Zerlegt man ihn in zwei Komponenten senkrecht und parallel zu $(\mathbf{\hat{f}} + \mathbf{\hat{l}})$, so ist die erste divergenzfrei, die zweite rotationsfrei. Nur die senkrechte Komponente ist für die entstehende elektromagnetische Strahlung verantwortlich. Damit kann man sich als Ursache der Emission HERTZsche Dipole vorstellen, die so angeordnet sind, daß sie senkrecht zur Richtung $\mathbf{\hat{f}} + \mathbf{\hat{l}}$ in der $(\mathbf{\hat{f}}, \mathbf{\hat{l}})$ -Ebene schwingen. Sofern das Plasma in der zu $(\mathbf{\hat{f}} + \mathbf{\hat{l}})$ senkrechten Ebene hinreichend ausgedehnt ist, erwartet man auf Grund dieses Bildes als Ergebnis der Wechselwirkung eine ebene elektromagnetische Welle in Richtung $(\mathbf{\hat{f}} + \mathbf{\hat{l}})$. Alle anderen Richtungen fallen infolge Interferenz aus, da zwischen den Dipolen feste Phasenbeziehungen bestehen.

Die in $(\mathbf{\hat{l}} - \mathbf{\hat{f}})$ -Richtung laufende Kraftdichtewelle hat die Frequenz $\Omega_1 - \Omega_0$. Da einerseits $|\Omega_1 - \Omega_0| < \omega_{pe}$ ist und andererseits elektromagnetische Wellen mit einer Frequenz $< \omega_{pe}$ in einem Plasma nicht möglich sind, ist dieser Vektor für den betrachteten Mechanismus ohne Bedeutung.

In ähnlicher Weise liefert in (19) $\mathfrak{S}_2 = (1/4 \pi \omega_{pe}^2) (\mathbf{\hat{e}}_1 \text{div } \mathbf{\hat{e}}_0 + \mathbf{\hat{e}}_0 \text{div } \mathbf{\hat{e}}_1)$ eine Kraftdichtewelle, die dadurch zustande kommt, daß sich die zeitliche Raumladungsänderung der einen Welle [z. B. $(1/4 \pi) \text{div } \mathbf{\hat{e}}_0$] im Geschwindigkeitsfeld (infolge $\mathbf{\hat{e}}_1 = 4 \pi e N_{e1} \bar{v}_{e1}$) der anderen abspielt und umgekehrt.

Um die Lösung von (19) zu erhalten, bilden wir die Rotation von (18) und integrieren über die Zeit. Da $\text{rot } \mathfrak{S}_T = -(1/c) \ddot{\mathfrak{S}}$ ist, folgt eine Differentialgleichung für das mit der elektromagnetischen Welle verknüpfte Magnetfeld \mathfrak{S} :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \Omega_p^2 \right) \mathfrak{S} = -\mathfrak{S} \quad (22)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} = & i \frac{e}{m c} \frac{U_0 U_1}{4} \left[\left(1 + \frac{\Omega_0 \Omega_1}{\omega_p^2} \right) \frac{1}{\Omega_1 + \Omega_0} (\mathbf{\hat{l}} \times \mathbf{\hat{f}}) \left(\frac{l}{k} - \frac{k}{l} \right) \right. \\ & \cdot \left\{ e^{i[(\mathbf{\hat{f}} + \mathbf{\hat{l}}) \cdot \mathbf{r} - (\Omega_1 + \Omega_0) t]} - e^{-i[(\mathbf{\hat{f}} + \mathbf{\hat{l}}) \cdot \mathbf{r} - (\Omega_1 + \Omega_0) t]} \right\} + \left(1 - \frac{\Omega_0 \Omega_1}{\omega_{pe}^2} \right) \\ & \cdot \frac{1}{\Omega_1 - \Omega_0} (\mathbf{\hat{l}} \times \mathbf{\hat{f}}) \left(\frac{l}{k} - \frac{k}{l} \right) \left\{ e^{i[(\mathbf{\hat{l}} - \mathbf{\hat{f}}) \cdot \mathbf{r} - (\Omega_1 - \Omega_0) t]} - e^{-i[(\mathbf{\hat{l}} - \mathbf{\hat{f}}) \cdot \mathbf{r} - (\Omega_1 - \Omega_0) t]} \right\} \Big]. \end{aligned} \quad (23)$$

Der Teil von \mathfrak{S} mit der Frequenz $\Omega_1 - \Omega_0$ kann aus dem oben erwähnten Grunde wegfallen. Bezeichnet man noch $\mathbf{\hat{f}} + \mathbf{\hat{l}}$ als x -Richtung, so wird:

$$\mathfrak{S} = -\frac{2e}{m c} \frac{U_0 U_1}{4} \left(1 + \frac{\Omega_1 \Omega_0}{\omega_{pe}^2} \right) \frac{1}{\Omega_1 + \Omega_0} (\mathbf{\hat{l}} \times \mathbf{\hat{f}}) \left(\frac{l}{k} - \frac{k}{l} \right) \cdot \sin(|\mathbf{\hat{f}} + \mathbf{\hat{l}}| x - (\Omega_1 + \Omega_0) t). \quad (24)$$

Unter der Annahme, daß das Plasma in der Ebene senkrecht zur x -Achse unendlich ausgedehnt ist, liegt ein lineares Problem vor; \mathfrak{S} hängt dann nur noch von x und t ab. Ohne Berücksichtigung von Einschwingungsvorgängen folgt aus (22):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\Omega_1 + \Omega_0}{c^*} \right)^2 \right) \mathfrak{S} = -\mathfrak{S}(x, t) \quad (25) \quad \text{mit} \quad c^* = c(1 - \Omega_p^2 / (\Omega_1 + \Omega_0)^2)^{-1/2}. \quad (26)$$

Mit Hilfe der eindimensionalen GREENSchen Funktion ergibt sich als Lösung von (25):

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(x, t) = \frac{i}{2} \frac{c^*}{\Omega_1 + \Omega_0} \int_{-L}^{+L} \exp \left\{ i \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{c^*} |x - x_0| \right\} \mathfrak{S}(x_0, t) dx_0. \quad (27)$$

Dabei wurde eine Plasmaschicht der Dicke $2L$ angenommen. Zur expliziten Berechnung von (27) kann man sich auf den Bereich $x > L$ beschränken, so daß folgt:

$$\mathfrak{S} = \frac{i}{2} \frac{c^*}{\Omega_1 + \Omega_0} \exp \left\{ i \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{c} x \right\} \int_{-L}^{+L} \exp \left\{ -i \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{c^*} x_0 \right\} \mathfrak{S}(x_0, t) dx_0. \quad (28)$$

Das c^* bei x wurde durch c ersetzt, da der entsprechende Exponentialterm der Ausbreitung der Welle im Raum zwischen Plasma und Aufpunkt Rechnung trägt und wir dort Vakuum annehmen. – Die Integration liefert:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} = & -\frac{U_0 U_1}{8} \frac{e}{m} (\mathbf{l} \times \mathbf{f}) \left(\frac{l}{k} - \frac{k}{l} \right) \left(1 + \frac{\Omega_0 \Omega_1}{\omega_{pe}^2} \right) [(\Omega_1 + \Omega_0)^2 - \Omega_p^2]^{-1/2} \frac{1}{\Omega_0 + \Omega_1} L \\ & \cdot \left\{ \exp \left\{ i \left[\frac{\Omega_0 + \Omega_1}{c} x - (\Omega_0 + \Omega_1) t \right] \right\} \frac{2 \sin\{(|\mathbf{f} + \mathbf{l}| - (\Omega_1 + \Omega_0)/c^*) L\}}{(|\mathbf{f} + \mathbf{l}| - (\Omega_1 + \Omega_0)/c^*) L} \right. \\ & \left. - \exp \left\{ i \left[\frac{\Omega_0 + \Omega_1}{c} x + (\Omega_0 + \Omega_1) t \right] \right\} \frac{2 \sin\{(|\mathbf{f} + \mathbf{l}| + (\Omega_1 + \Omega_0)/c^*) L\}}{(|\mathbf{f} + \mathbf{l}| + (\Omega_1 + \Omega_0)/c^*) L} \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Außerdem interessiert hier nur die das Plasma in positiver x -Richtung verlassende Welle, d. h., wenn wir zur reellen Schreibweise übergehen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} = & + \frac{U_0 U_1}{4} \frac{e}{m} (\mathbf{l} \times \mathbf{f}) \left(\frac{l}{k} - \frac{k}{l} \right) \left(1 + \frac{\Omega_1 \Omega_0}{\omega_{pe}^2} \right) [(\Omega_1 + \Omega_0)^2 - \Omega_p^2]^{-1/2} \frac{1}{\Omega_1 + \Omega_0} L \\ & \cdot \frac{\sin\{(|\mathbf{f} + \mathbf{l}| - (\Omega_1 + \Omega_0)/c^*) L\}}{(|\mathbf{f} + \mathbf{l}| - (\Omega_1 + \Omega_0)/c^*) L} \sin(\Omega_0 + \Omega_1) \left(t - \frac{x}{c} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Daraus ergibt sich für den Betrag des POYNTING-Vektors, d. h. für die in x -Richtung pro cm^2 und sec abgestrahlte Energie (da $|\mathfrak{E}_T| = |\mathfrak{S}|$ ist und \mathfrak{E}_T senkrecht auf \mathfrak{S} steht):

$$\begin{aligned} I = & \frac{c}{4\pi} \left(\frac{U_0 U_1}{4} \right)^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 (\mathbf{l} \times \mathbf{f})^2 \left(\frac{l}{k} - \frac{k}{l} \right)^2 \left(1 + \frac{\Omega_1 \Omega_0}{\omega_{pe}^2} \right)^2 \frac{1}{(\Omega_1 + \Omega_0)^2} L^2 \\ & \cdot \frac{1}{(\Omega_1 + \Omega_0)^2 - \Omega_p^2} \left\{ \frac{\sin\{(|\mathbf{f} + \mathbf{l}| - (\Omega_1 + \Omega_0)/c^*) L\}}{(|\mathbf{f} + \mathbf{l}| - (\Omega_1 + \Omega_0)/c^*) L} \right\}^2 \sin^2(\Omega_1 + \Omega_0) \left(t - \frac{x}{c} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Aus (31) ist folgendes zu entnehmen:

1. Wenn die beiden Plasmawellen sich in gleicher oder entgegengesetzter Richtung fortpflanzen, verschwindet $\mathbf{l} \times \mathbf{f}$, so daß keine elektromagnetische Energie abgestrahlt wird. Das folgt auch sofort aus den Überlegungen zu (19) bis (21). In diesen Fällen pflanzt sich die „Kraftdichtewelle“ parallel bzw. antiparallel zu den beiden Plasmawellen fort, und der Kraftdichtevektor schwingt stets in Fortpflanzungsrichtung. Er hat also keine senkrechte Komponente, so daß keine entsprechenden HERTZschen Dipole aufgebaut werden können.

2. Wenn die beiden Wellen gleiche Frequenz bzw. Wellenzahl besitzen, wird ebenfalls keine elektromagnetische Energie abgestrahlt. Auch das folgt aus (19) bis (21) unmittelbar. Denn dann kompensieren sich die transversalen Komponenten von

$$(1/4\pi) \epsilon_1 \operatorname{div} \epsilon_0 \quad \text{und} \quad (1/4\pi) \epsilon_0 \operatorname{div} \epsilon_1,$$

d. h. der Kraftdichtevektor schwingt wieder in Ausbreitungsrichtung der „Kraftdichtewelle“.

3. Energie wird maximal abgestrahlt, wenn $|\mathbf{f} + \mathbf{l}| = (\Omega_0 + \Omega_1)/c^*$ ist, d. h., wenn die Summe der Wellenvektoren der beiden Plasmawellen gleich ist dem Wellenvektor der abgestrahlten elektromagnetischen Welle, multipliziert mit dem entspre-

chenden Brechungsindex im Plasma. Für eine kleine Abweichung von der Beziehung $|\mathbf{f} + \mathbf{l}| = (\Omega_0 + \Omega_1)/c^*$ wird der entsprechende Klammerausdruck in (31) klein, da die Liniendimension L immer groß ist gegen die auftretenden Wellenlängen.

Im Falle maximaler Energieabstrahlung müssen zwischen \mathbf{f} und \mathbf{l} folgende Beziehungen gelten:

$$l \sin \psi + k \sin \varphi = (\Omega_1 + \Omega_0)/c^*,$$

$$l \cos \psi = k \cos \varphi,$$

also insbesondere:

$$\sin \varphi \leq (\Omega_1 + \Omega_0)/k c^*,$$

$$\sin \psi \leq (\Omega_1 + \Omega_0)/l c^*.$$

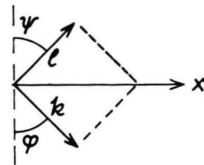


Abb. 1. Relative Lage der Wellenvektoren der beiden wechselwirkenden Plasmawellen.

Da die Wellenzahlen elektromagnetischer Wellen im allgemeinen klein sind gegen diejenigen von Plasmawellen, sind auch φ und ψ kleine Winkel, d. h., die beiden wechselwirkenden Plasmawellen müssen nahezu antiparallel laufen.

IV. Wechselwirkung einer ebenen Plasmaelektronenwelle mit thermischen Wellen

a) Lösungsmethode

Wie in III treten Differentialgleichungen für \mathfrak{E}_T bzw. für das zu \mathfrak{E}_T gehörende Magnetfeld \mathfrak{H} von der Form (22) auf. Mit Hilfe einer zeitlichen FOURIER-Transformation

$$\mathfrak{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}_\omega e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{analog für } \mathfrak{H})$$

erhält man die Differentialgleichung:

$$(\Delta + (\omega^2 - \Omega_p^2)/c^2) \mathfrak{H}_\omega = -\mathfrak{E}_\omega. \quad (32)$$

Diese (25) entsprechende Differentialgleichung läßt sich wieder mit Hilfe der GREENSchen Funktion für die Fernzone lösen, d. h. für den Fall, daß die Entfernung vom Plasma groß ist gegen die charakteristische Plasmadimension. Es ist:

$$\mathfrak{H}_\omega = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\exp\{i(\omega/c)|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathfrak{E}_\omega(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad (33)$$

wobei der Ortsvektor \mathbf{r} zum Aufpunkt, der Ortsvektor \mathbf{r}' zum Volumenelement $d^3\mathbf{r}'$ führt und

$$c' = c(1 - [\Omega_p/\omega]^2)^{-1/2}$$

die Lichtgeschwindigkeit im Plasma ist.

Zu integrieren ist über das streuende Plasmavolumen V . Verlegt man den Nullpunkt ins Plasma, so ist $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$. (33) läßt sich dann vereinfachen, so daß mit $\mathbf{r} = \mathbf{r}$

$$\mathfrak{H}_\omega = \frac{1}{4\pi r} e^{i(\omega/c)r} \int_V \exp\left\{-\frac{\omega}{c'} \mathbf{e} \cdot \mathbf{r}'\right\} \mathfrak{E}_\omega(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (34)$$

folgt. Vor dem Integral wurde wie in (28) das c' durch c ersetzt. Nach der Rücktransformation ergibt sich \mathfrak{H} zu:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(r/c-t)} \cdot \int_V \exp\{-i(\omega/c') \mathbf{e} \cdot \mathbf{r}'\} \mathfrak{E}_\omega(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' d\omega. \quad (35)$$

Aus \mathfrak{H} berechnet sich $\mathfrak{E}_T = -\mathbf{e} \times \mathfrak{H}$.

Daraus folgt über den POYNTING-Vektor die in die Raumwinkeleinheit pro sec emittierte Energie zu

$$I = (c/64\pi^3) \Omega^2, \quad (36)$$

wobei $\Omega = 4\pi r \mathfrak{H}$ definiert ist.

b) Berechnung der elektrischen Feldstärke der thermischen Plasmawellen

Die elektrische Feldstärke der thermischen Plasmawellen läßt sich aus den zeitlichen Mittelwerten des Quadrats der Ladungsdichteschwankungen eines Plasmas im thermodynamischen Gleichgewicht ermitteln, wie sie von SALPETER¹³ berechnet wurden.

SALPETER¹³ geht von einem 2-Komponenten-Plasma mit N Elektronen und N/Z Ionen der Ladung $Z \cdot e$ aus und schreibt die Ladungsdichten von Elektronen Q_e und Ionen Q_i in der Form:

$$Q_e = -e \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad Q_i = Z e \sum_{j=1}^{N/Z} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j). \quad (37)$$

Dabei sind $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(t)$, $\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_j(t)$ die Orte des j -ten Elektrons bzw. Ions zur Zeit t . Die FOURIER-Transformation von (37) liefert:

$$Q_{ke} = -e \sum_{j=1}^N \exp\{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j\} = \mu_{ke} \exp\{-i\delta_{ke}\};$$

$$Q_{ki} = Z e \sum_{j=1}^{N/Z} \exp\{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_j\} = \mu_{ki} \exp\{-i\delta_{ki}\}, \quad (38)$$

wobei μ_{ke} , δ_{ke} bzw. μ_{ki} , δ_{ki} durch (38) definiert wird. Durch Ensemblemittelung berechnet SALPETER die zeitlichen Mittelwerte von $|\mu_{ke}|^2$ und $|\mu_{ki}|^2$. Der Mittelwert $\langle |\mu_{ke}|^2 \rangle$ läßt sich in zwei Anteile zerlegen, wovon der eine die mit den Ionen korrelierten Elektronenladungsdichteschwankungen darstellt und mit Θ_{ei} bezeichnet wird, während der andere — Θ_{ee} — die nichtkorrelierten Schwankungen beschreibt. Für das folgende ist es zweckmäßiger, die einzelnen Größen auf $(n_0 e)^2$ zu beziehen. Außerdem setzen wir in den Formeln von SALPETER $Z = 1$. Dann gilt mit $V = N/n_0$:

$$\langle s_{ik}^2(t) \rangle = \frac{\langle |\mu_{ki}|^2 \rangle}{(n_0 e)^2} = \frac{V}{n_0} \frac{(k \lambda_D)^2 + 1}{(k \lambda_D)^2 + 2},$$

$$\langle s_{ek}^2(t) \rangle = \frac{\Theta_{ee}}{(n_0 e)^2} = \frac{V}{n_0} \frac{(k \lambda_D)^2}{(k \lambda_D)^2 + 1}, \quad (39)$$

$$\langle s_{ei}^2(t) \rangle = \frac{\Theta_{ei}}{(n_0 e)^2} = \frac{V}{n_0} \frac{1}{[(k \lambda_D)^2 + 1][(k \lambda_D)^2 + 2]}.$$

Für das folgende benötigen wir aber auch die zeitliche Abhängigkeit der Schwankungen. Wir benutzen dazu das Bild der thermischen Plasmawellen und nehmen an, daß die zeitlichen FOURIER-Komponenten von $s_{ek}(t)$ nur bei $\pm \Omega_k$ und diejenigen von $s_{ik}(t)$ und $s_{ei}(t)$ nur bei $\pm \omega_k$ von Null verschieden sind. Dabei sind Ω_k , ω_k die Frequenzen einer Plasmaelektronen- bzw. Ionenwelle mit dem Wellenvektor \mathbf{k} , und es ist $\Omega_k \approx \omega_{pe}$, $\omega_k \leq \omega_{pi}$. Also gilt:

¹³ E. E. SALPETER, Phys. Rev. **120**, 1528 [1960].

$$\begin{aligned}
s_{ek}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{2} \langle s_{ek}^2(t) \rangle} \{ \delta(\omega - \Omega_k) + \delta(\omega + \Omega_k) \} e^{i\omega t} d\omega, \\
s_{eik}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{2} \langle s_{eik}^2(t) \rangle} \{ \delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k) \} e^{i\omega t} d\omega, \\
s_{ik}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{2} \langle s_{ik}^2(t) \rangle} \{ \delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k) \} e^{i\omega t} d\omega.
\end{aligned} \tag{40}$$

Mit (39) folgt:

$$\begin{aligned}
s_e(\mathbf{r}, t) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{V}{n_0}} \frac{k \lambda_D}{V(k \lambda_D)^2 + 1} \{ \delta(\omega - \Omega_k) + \delta(\omega + \Omega_k) \} \cdot \exp\{i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \delta'_{ke})\} d\omega \frac{d^3 \mathbf{f}}{(2\pi)^3}, \\
s_{ei}(\mathbf{r}, t) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{V}{n_0}} \frac{1}{V[(k \lambda_D)^2 + 1][(k \lambda_D)^2 + 2]} \cdot \{ \delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k) \} \exp\{i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \delta_{ki})\} d\omega \frac{d^3 \mathbf{f}}{(2\pi)^3}, \\
s_i(\mathbf{r}, t) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{V}{n_0}} \sqrt{\frac{(k \lambda_D)^2 + 1}{(k \lambda_D)^2 + 2}} \{ \delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k) \} \cdot \exp\{i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \delta_{ki})\} d\omega \frac{d^3 \mathbf{f}}{(2\pi)^3}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Es erhebt sich jetzt die Frage, wie die Integrationsgrenzen in (41) zu wählen sind. Einmal ist das Bild der Plasmawellen für $(k \lambda_D) \gg 1$ nicht mehr sinnvoll; zum anderen zeigt sich im weiteren Verlauf der Rechnungen, daß es auf den genauen Wert der Grenzen nicht ankommt. Um im folgenden weitere Diskussionen zu vermeiden, ist es zweckmäßig, folgende Funktionen zu definieren:

$$\begin{aligned}
J_1(k) &= (2\pi)^{-3} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{V}{n_0}} \frac{k \lambda_D}{V(k \lambda_D)^2 + 1}, \quad k \lambda_D \lesssim 1; \quad J_1(k) = 0, \quad k \lambda_D \rightarrow \infty; \\
J_2(k) &= (2\pi)^{-3} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{V}{n_0}} \left(V[(k \lambda_D)^2 + 1][(k \lambda_D)^2 + 2] \right)^{-1}, \quad k \lambda_D \lesssim 1; \quad J_2(k) = 0, \quad k \lambda_D \rightarrow \infty; \\
J_3(k) &= (2\pi)^{-3} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{V}{n_0}} \sqrt{\frac{(k \lambda_D)^2 + 1}{(k \lambda_D)^2 + 2}}, \quad k \lambda_D \lesssim 1; \quad J_3(k) = 0, \quad k \lambda_D \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{42}$$

Für die dimensionslosen Teilchendichteschwankungen erhält man dann:

$$\begin{aligned}
s_e(\mathbf{r}, t) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} J_1(k) \{ \delta(\omega - \Omega_k) + \delta(\omega + \Omega_k) \} e^{i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \delta'_{ke})} d\omega d^3 \mathbf{f}, \\
s_{ei}(\mathbf{r}, t) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} J_2(k) \{ \delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k) \} e^{i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \delta_{ki})} d\omega d^3 \mathbf{f}, \\
s_i(\mathbf{r}, t) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} J_3(k) \{ \delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k) \} e^{i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \delta_{ki})} d\omega d^3 \mathbf{f}.
\end{aligned} \tag{43}$$

Aus (43) ergeben sich die elektrischen Feldstärken $\mathfrak{E}_e(\mathbf{r}, t)$ und $\mathfrak{E}_i(\mathbf{r}, t)$ der thermischen Plasmaelektro- und Ionenwellen über die MAXWELL-Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{E}_e = -4\pi e n_0 s_e(\mathbf{r}, t) \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{div} \mathfrak{E}_i = 4\pi e n_0 (s_i(\mathbf{r}, t) - s_{ei}(\mathbf{r}, t))$$

$$\text{zu:} \quad \mathfrak{E}_e(\mathbf{r}, t) = i \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{f}}{k} J_4(k) \{ \delta(\omega - \Omega_k) + \delta(\omega + \Omega_k) \} e^{i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \delta'_{ke})} d\omega d^3 \mathbf{f}, \tag{44 a}$$

$$\mathfrak{E}_i(\mathbf{r}, t) = i \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{f}}{k} J_5(k) \{ \delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k) \} e^{i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \delta_{ki})} d\omega d^3 \mathbf{f} \tag{44 b}$$

$$\text{mit} \quad J_4(k) = (4\pi e n_0/k) J_1(k), \quad J_5(k) = (4\pi e n_0/k) \{ J_2(k) - J_3(k) \}. \tag{45}$$

Aus (44) läßt sich das mittlere Quadrat der elektrischen Feldstärke in einem Plasma berechnen, in dem die Ionen nur einen neutralisierenden Hintergrund bilden (44 a) bzw. in dem sowohl Ionen wie Elektronen eine Temperatur besitzen (44 a und 44 b).

Betrachten wir zunächst ein Plasma mit Ionenhintergrund. Auf Grund der JEANSSchen Abzählmethode ist $V(2\pi)^{-3} d^3\mathbf{k}$ die Anzahl der Wellen im Intervall $\mathbf{k}, \mathbf{k} + d^3\mathbf{k}$ im Volumen V . Damit folgt für die elektrische Feldstärke einer thermischen Plasmaelektronenwelle mit dem Wellenvektor \mathbf{k} aus (44 a) :

$$\mathfrak{E}_{ek} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{(2\pi)^3}{V} J_4(k) \{ \delta(\omega - \Omega_k) + \delta(\omega + \Omega_k) \} e^{-i\omega t} d\omega.$$

Über den zeitlichen Mittelwert $\langle |\mathfrak{E}_{ek}|^2 \rangle = 2 \{ [(2\pi)^3/V] J_4(k) \}^2$ ergibt sich nach Multiplikation mit $V(2\pi)^{-3} d^3\mathbf{k}$ und anschließender Integration über \mathbf{k} das mittlere Quadrat des elektrischen Feldes:

$$\left\langle \frac{\mathfrak{E}_e^2}{8\pi} \right\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{(2\pi)^6}{4\pi} \frac{1}{V} J_4^2(k), \quad \text{also} \quad \left\langle \frac{\mathfrak{E}_e^2}{8\pi} \right\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\kappa T}{2} \frac{1}{(k\lambda_D)^2 + 1} \quad (46)$$

Zur Berechnung der mittleren Energiedichte $\langle \mathfrak{E}_p^2/8\pi \rangle$ des elektrischen Feldes in einem Plasma mit Ionenbewegung ermitteln wir zunächst in analoger Weise

$$\left\langle \frac{\mathfrak{E}_i^2}{8\pi} \right\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{(2\pi)^6}{4\pi} \frac{1}{V} J_5^2(k) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\kappa T}{2} \frac{(k\lambda_D)^2}{[(k\lambda_D)^2 + 1][(k\lambda_D)^2 + 2]}. \quad (47)$$

$$\text{Wegen } \langle \mathfrak{E}_p^2 \rangle = \langle \mathfrak{E}_i^2 \rangle + \langle \mathfrak{E}_e^2 \rangle \text{ folgt: } \left\langle \frac{\mathfrak{E}_p^2}{8\pi} \right\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\kappa T}{2} \frac{2}{(k\lambda_D)^2 + 2}. \quad (48)$$

(46) und (48) stimmen mit den Ergebnissen von Fluktuationsrechnungen mit Autokorrelationsfunktionen überein (ROSTOKER¹⁴). [(46) wird dort explizit angegeben. (48) erhält man unmittelbar mit Hilfe von Gl. (32) der zitierten Arbeit, wenn man $\varepsilon(k, 0) = 1 + (k\lambda_D)^{-2} + (k\lambda_D)^{-2}$ und $\lim_{R \rightarrow \infty} U(\mathbf{k}, i\omega) = 2k/i\pi\omega$ beachtet.]

Für spätere Zwecke soll (44) noch umgeformt werden. Da \mathcal{Q}_i reell ist, muß für die FOURIER-Komponente $\mathcal{Q}_{ki}^* = \mathcal{Q}_{-ki}$ gelten, wenn * das Konjugiert-Komplexe bezeichnet. Da auch μ_{ki} reell ist, folgt $\delta_{-ki} = -\delta_{ki}$. Analog gilt $\delta'_{-ke} = -\delta'_{ke}$. Die ω -Integration von (44 a) liefert:

$$\mathfrak{E}_e(\mathbf{r}, t) = i \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{k}}{k} J_4(k) \{ e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega_k t - \delta'_{ke})} + e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \Omega_k t - \delta'_{ke})} \} d^3\mathbf{k}.$$

Eine Transformation $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ für den zweiten Teil des Integrals ergibt:

$$\mathfrak{E}_e(\mathbf{r}, t) = i \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{k}}{k} J_4(k) \{ e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega_k t - \delta'_{ke})} - e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega_k t - \delta'_{ke})} \} d^3\mathbf{k}. \quad (49)$$

$$\text{Analog folgt: } \mathfrak{E}_i(\mathbf{r}, t) = i \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{k}}{k} J_5(k) \{ e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t - \delta_{ki})} - e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t - \delta_{ki})} \} d^3\mathbf{k}. \quad (50)$$

c) Wechselwirkung einer ebenen Plasmaelektronenwelle mit thermischen Plasmaelektronenwellen

Für diese Betrachtungen werden die Ionen als ruhend angenommen. Das elektrische Feld der thermischen Wellen ist durch (44 a) bzw. (49) gegeben. Das Feld der einfallenden Welle sei

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{l} \frac{U}{2} \{ e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega_1 t)} + e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega_1 t)} \}. \quad (51)$$

Die Wechselwirkung wird durch die Gln. (18) bzw. (19) beschrieben, wenn \mathbf{e}_0 durch $\mathfrak{E}_e(\mathbf{r}, t)$ ersetzt

wird. Beim Übergang von (18) nach (19) wird allerdings der Term $\mathfrak{E}_e \text{div } \mathfrak{E}_e$, der jetzt nicht mehr rotationsfrei ist, vernachlässigt. Das bedeutet, daß die elektromagnetische Strahlung des Plasmas auf Grund der Selbstwechselwirkung der thermischen Wellen unberücksichtigt bleibt. Dies ist sicher erlaubt, solange

$$|\mathbf{e}_1| \gg |\mathfrak{E}_e| \quad (52)$$

ist. $|\mathfrak{E}_e|$ läßt sich aus (46) abschätzen, wobei zu berücksichtigen ist, daß das divergierende Integral wieder nur für $k\lambda_D \lesssim 1$ sinnvoll ist. Durch Integra-

¹⁴ N. ROSTOKER, Nucl. Fusion **1**, 101 [1961].

tion von 0 bis $k = \lambda_D^{-1}$ folgt:

$$|\mathfrak{E}_e| \approx e \lambda_D^{-2} \sqrt{N_D},$$

wobei $N_D = n_0 \lambda_D^3$ die Anzahl der Elektronen in der DEBYE-Kugel ist. Mit $|\mathfrak{E}_1| \approx \varphi / \lambda_D$ (φ = Potential der ebenen Plasmawelle) bedeutet daher (52):

$$\varphi / \lambda_D \gg e \lambda_D^{-2} \sqrt{N_D}, \quad \text{also: } e \varphi / \kappa T \gg N_D^{-1/2}. \quad (53)$$

Außerdem setzt die Anwendung von (18) die Gültigkeit von (16) voraus, wobei dort das Potential ψ des gesamten elektrischen Feldes auftritt. Wegen (52) besagt (16) aber

$$e \varphi / \kappa T \ll 1. \quad (54)$$

(53) und (54) sind gleichzeitig nur erfüllt, wenn N_D hinreichend groß ist.

Tab. 1 zeigt, daß für die in Frage kommenden Bursts der Sonnenkorona (53) und (54) gut erfüllbar sind.

	n_0 cm ⁻³	T °K	λ_D cm	N_D	v_T cm sec ⁻¹
A	10 ⁷	2 · 10 ⁶	2	8 · 10 ⁷	5,5 · 10 ⁸
B	10 ¹¹	5 · 10 ³	10 ⁻³	10 ²	4 · 10 ⁷

Tab. 1. Charakteristische Größen der Sonnenatmosphäre.
A: Sonnenkorona, B: Sonnenschromosphäre; $v_T = \sqrt{\kappa T / m}$.

Bildet man wieder die Rotation von (18), so erhält man nach zeitlicher Integration eine Differentialgleichung der Form (22), wobei nun

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} = & -\frac{e}{m c} \frac{U}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \left(1 + \frac{\Omega_1 \Omega_k}{\omega_{pe}^2} \right) (\mathfrak{l} \times \mathfrak{f}) \left(\frac{l}{k} - \frac{k}{l} \right) \frac{1}{\Omega_1 + \Omega_k} J_4(k) \right. \\ & \cdot [e^{i[(\mathfrak{l} + \mathfrak{l}) \cdot \mathbf{r} - (\Omega_1 + \Omega_k) t - \delta'_{ke}]} + e^{-i[(\mathfrak{l} + \mathfrak{l}) \cdot \mathbf{r} - (\Omega_1 + \Omega_k) t - \delta'_{ke}]}] d^3 \mathfrak{f} \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \left(1 - \frac{\Omega_1 \Omega_k}{\omega_{pe}^2} \right) (\mathfrak{l} \times \mathfrak{f}) \left(\frac{l}{k} - \frac{k}{l} \right) \frac{1}{\Omega_1 - \Omega_k} J_4(k) \\ & \cdot [e^{i[(\mathfrak{l} - \mathfrak{l}) \cdot \mathbf{r} - (\Omega_1 - \Omega_k) t + \delta'_{ke}]} + e^{-i[(\mathfrak{l} - \mathfrak{l}) \cdot \mathbf{r} - (\Omega_1 - \Omega_k) t + \delta'_{ke}]}] d^3 \mathfrak{f} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (55)$$

Der Quellterm zerfällt analog zu (23). Da $|\Omega_1 - \Omega_k| < \omega_{pe}$ für alle in Frage kommenden k gilt, trägt der zweite Term wieder nichts zur elektromagnetischen Ausstrahlung bei. Die Lösung von (22) mit (55) ergibt sich gemäß (35). Die dort benötigte zeitliche FOURIER-Transformierte hat die Form:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_\omega = & \frac{e}{m c} \frac{U}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \left(1 + \frac{\Omega_1 \Omega_k}{\omega_{pe}^2} \right) \mathfrak{l} \times \mathfrak{f} \left(\frac{k}{l} - \frac{l}{k} \right) \frac{1}{\Omega_1 + \Omega_k} J_4(k) \\ & \cdot \{ \delta(\omega - \Omega_1 - \Omega_k) e^{i[(\mathfrak{l} + \mathfrak{l}) \cdot \mathbf{r} - \delta'_{ke}]} + \delta(\omega + \Omega_1 + \Omega_k) e^{-i[(\mathfrak{l} + \mathfrak{l}) \cdot \mathbf{r} - \delta'_{ke}]} \} d^3 \mathfrak{f}. \end{aligned} \quad (56)$$

Damit gilt für \mathfrak{S} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} = & \frac{1}{4 \pi r} \frac{e}{m c} \frac{U}{2} \int_V \int_{-\infty}^{+\infty} \int \left(1 + \frac{\Omega_1 \Omega_k}{\omega_{pe}^2} \right) \frac{1}{\Omega_1 + \Omega_k} J_4(k) \mathfrak{l} \times \mathfrak{f} \left(\frac{k}{l} - \frac{l}{k} \right) \\ & \cdot \left\{ \exp \left\{ i \left[\left(\mathfrak{f} + \mathfrak{l} - \frac{e}{c'} [\Omega_1 + \Omega_k] \right) \cdot \mathbf{r}' - \delta'_{ke} \right] \right\} \exp \left\{ -i(\Omega_1 + \Omega_k) \left(t - \frac{r}{c} \right) \right\} \right. \\ & \left. + \exp \left\{ -i \left[\left(\mathfrak{f} + \mathfrak{l} - \frac{e}{c'} [\Omega_1 + \Omega_k] \right) \cdot \mathbf{r}' - \delta'_{ke} \right] \right\} \exp \left\{ i(\Omega_1 + \Omega_k) \left(t - \frac{r}{c} \right) \right\} \right\} d^3 \mathfrak{f} d^3 \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (57)$$

Die Variable \mathbf{r}' tritt nur in der komplexen Exponentialfunktion auf. Wenn die Lineardimension des Volumens hinreichend groß gegen die Wellenlänge $2 \pi l^{-1}$ ist, löschen sich – solange der Exponent $\neq 0$ ist – die Beiträge zum Volumenintegral gegenseitig aus, so daß die Integration über \mathbf{r}' eine δ -Funktion liefert:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} = & \frac{1}{4 \pi r} \frac{e}{m c} (2 \pi)^3 U \int_{-\infty}^{+\infty} \int \left(1 + \frac{\Omega_1 \Omega_k}{\omega_{pe}^2} \right) \frac{1}{\Omega_1 + \Omega_k} \\ & \cdot J_4(k) \mathfrak{l} \times \mathfrak{f} \left(\frac{k}{l} - \frac{l}{k} \right) \delta \left(\mathfrak{f} + \mathfrak{l} - \frac{e}{c'} [\Omega_1 + \Omega_k] \right) \cos \left[(\Omega_1 + \Omega_k) \left(t - \frac{r}{c} \right) + \delta'_{ke} \right] d^3 \mathfrak{f}. \end{aligned} \quad (58)$$

Aus (57) liest man ab, was auf Grund der Folgerungen aus der Intensitätenformel (31) für die Wechselwirkung zweier ebener Plasmaelektronenwellen zu erwarten war: Diejenigen thermischen Wellen sind für

die Ausstrahlung in Blickrichtung von Bedeutung, deren Wellenzahl $\mathbf{k} = -\mathbf{l} + (\Omega_1 + \Omega_k) \mathbf{e}/c'$ ist. Da im allgemeinen $|\mathbf{l}| \gg (\Omega_1 + \Omega_k)/c'$ ist, sind für die Emission elektromagnetischer Wellen nur jene thermischen Plasmaelektronenwellen wichtig, deren Wellenzahl etwa gleich der der einfallenden ebenen Plasmawelle ist. Da sich der Wellenvektor \mathbf{k} auf die FOURIER-Analyse des kollektiven thermischen, elektrischen Feldes bei vernachlässigter Ionenbewegung bezieht und dieses die thermischen Elektronendichteschwankungen beschreibt, gilt weiter: Nur solche mit den Plasmaelektronenwellen verknüpften Inhomogenitäten sind für die Umsetzung longitudinaler in transversale Wellen wesentlich, deren charakteristische Dimension gleich der Wellenlänge der einfallenden ebenen Plasmawelle ist.

Die Integration von (58) liefert:

$$\tilde{\mathfrak{S}} = -\frac{1}{4\pi r} \frac{e}{mc} (2\pi)^3 U \left(1 + \frac{\Omega_1 \Omega_{k_0}}{\omega_{pe}^2} \right) J_4(k_0) \cdot \frac{\mathbf{l} \times \mathbf{e} [2\mathbf{e} \cdot \mathbf{l} (\Omega_1 + \Omega_{k_0})/c_0 - ((\Omega_1 + \Omega_{k_0})/c_0)^2]}{c_0 l k_0} \cos[(\Omega_1 + \Omega_{k_0}) \left(t - \frac{r}{c} \right) + \delta'_{k_0 e}].$$

Dabei ist $\Omega_{k_0} = \Omega_k$ für $k = k_0 = |\mathbf{l} - (\mathbf{e}/c_0)(\Omega_1 + \Omega_{k_0})|$

und für $\omega = \Omega_1 + \Omega_{k_0}$ $c_0 = c' = \frac{c}{\sqrt{1 - (\Omega_p/(\Omega_1 + \Omega_{k_0}))^2}} = \frac{c}{n(\Omega_1 + \Omega_{k_0})}$.

$n(\Omega_1 + \Omega_{k_0})$ ist der Brechungsindex des Plasmas für eine elektromagnetische Welle der Frequenz $\Omega_1 + \Omega_{k_0}$. Wenn $l \lambda_D \gg (v_T/c) n(\Omega_1 + \Omega_{k_0})$ (59) ist, d. h. wegen $v_T/\lambda_D = \omega_{pe} \approx \Omega_1 + \Omega_{k_0}$; wenn $|\mathbf{l}| \gg (\Omega_1 + \Omega_{k_0})/c_0$ gilt, wird $k_0 \approx l$, also $\Omega_{k_0} \approx \Omega_1$. — Weiter ist nach (42) und (45)

$$(2\pi)^3 J_4(k_0) \approx (2\pi)^3 J_4 \left(\left| \mathbf{l} - \frac{2\Omega_1}{c_0} \mathbf{e} \right| \right) = \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \frac{e v_T}{\omega_{pe}} \frac{\sqrt{V n_0}}{\sqrt{(|\mathbf{l} - (2\Omega_1/c_0) \mathbf{e}| \lambda_D)^2 + 1}},$$

so daß

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \frac{1}{4\pi r} \frac{4}{\sqrt{2}} U \left(1 + \frac{\Omega_1^2}{\omega_{pe}^2} \right) \sqrt{\frac{V}{n_0}} \frac{v_T}{c} \frac{\omega_{pe} \Omega_1}{c_0^2} \frac{\mathbf{l} \times \mathbf{e}}{l} \cdot \frac{\Omega_1/c_0 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{l} - (2\Omega_1/c_0) \mathbf{e}|} \left[\left(\left| \mathbf{l} - \frac{2\Omega_1}{c_0} \mathbf{e} \right| \lambda_D \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \cos[2\Omega_1 \left(t - \frac{r}{c} \right) + \delta'_{k_0 e}]. \quad (60)$$

Die Frequenz der ausgesandten elektromagnetischen Strahlung ist also gleich der doppelten Frequenz der einfallenden Plasmawelle.

Die in dem Raumwinkel 1 pro sec abgestrahlte Energie ergibt sich aus (36) zu:

$$I = \frac{1}{\pi^2} \frac{U^2}{8\pi} V \left(\frac{v_T}{c} \right)^2 \frac{\omega_{pe}^2 \Omega_1^2}{n_0 c^3} \left(1 + \frac{\Omega_1^2}{\omega_{pe}^2} \right)^2 \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{4\Omega_1^2} \right)^2 \left(\frac{\mathbf{l} \times \mathbf{e}}{l} \right)^2 \cdot \left\{ \frac{\Omega_1/c_0 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{l} - (2\Omega_1/c_0) \mathbf{e}|} \right\}^2 \frac{1}{(|\mathbf{l} - (2\Omega_1/c_0) \mathbf{e}| \lambda_D)^2 + 1} \cos^2[2\Omega_1 \left(t - \frac{r}{c} \right) + \delta'_{k_0 e}]. \quad (61)$$

Führt man den Winkel Φ zwischen der Richtung \mathbf{e} und der Fortpflanzungsrichtung \mathbf{l}/l der ebenen Plasmawelle ein, und setzt man $|\mathbf{l} - (2\Omega_1/c_0) \mathbf{e}| \approx l$, so folgt:

$$I = \frac{1}{\pi^2} \frac{U^2}{8\pi} V \left(\frac{v_T}{c} \right)^2 \frac{\omega_{pe}^2 \Omega_1^2}{n_0 c^3} \left(1 + \frac{\Omega_1^2}{\omega_{pe}^2} \right)^2 \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{4\Omega_1^2} \right)^2 \frac{1}{(l \lambda_D)^2 + 1} \cdot \left(\frac{\Omega_1}{l c_0} - \cos \Phi \right)^2 \sin^2 \Phi \cos^2 \left[2\Omega_1 \left(t - \frac{r}{c} \right) + \delta'_{k_0 e} \right]. \quad (62)$$

Bei der Wechselwirkung einer ebenen Plasmaelektronenwelle mit thermischen Plasmaelektronenwellen entsteht also eine elektromagnetische Strahlung, die aus einer Überlagerung einer Dipol- mit einer Quadrupolstrahlung besteht. Dabei ist der Dipolcharakter wegen $\Omega_1/l c_0 \ll 1$ nur schwach ausgeprägt.

Durch zeitliche Mittelung über eine Periode und Integration über den Raumwinkel ergibt sich die gesamte pro sec vom Plasma emittierte mittlere Energie:

$$\bar{I}_2(\Omega_1) = \frac{4}{3\pi} \frac{U^2}{8\pi} V \left(\frac{v_T}{c} \right)^2 \frac{\omega_{pe}^2 \Omega_1^2}{n_0 c^3} \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{4\Omega_1^2} \right)^2 \left(1 + \frac{\Omega_1^2}{\omega_{pe}^2} \right)^2 \frac{1}{(l \lambda_D)^2 + 1} \left\{ \frac{1}{5} + \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{4\Omega_1^2} \right) \left(\frac{\Omega_1}{\omega_{pe}} \right)^2 \left(\frac{v_T}{c} \right)^2 \frac{1}{(l \lambda_D)^2} \right\}. \quad (63)$$

Ein Maß für die Wirksamkeit des obigen Mechanismus ist der Streukoeffizient $\sigma(2\Omega_1)$, wobei der Zusatz $2\Omega_1$ darauf hinweist, daß es sich um Strahlung handelt, deren Frequenz gleich der doppelten der einfallenden, ebenen Plasmawelle ist. Bezeichnet man die pro sec mit der Plasmawelle einfallende mittlere Energie mit \bar{W} , so gilt:

$$\sigma(2\Omega_1) = \bar{I}(2\Omega_1)/\bar{W}. \quad (64)$$

Nun ist

$$\bar{W} = \bar{w} \left. \frac{d\Omega_k}{dk} \right|_{k=l} \frac{V}{L}, \quad (65)$$

wenn \bar{w} die über ein Periode gemittelte Energiedichte der Welle, $d\Omega_k/dk|_{k=l}$ die Gruppengeschwindigkeit der Welle und L eine für das Plasma in Ausbreitungsrichtung der Welle charakteristische Länge sind.

Zur Berechnung der Energiedichte w gehen wir davon aus, daß sich w zusammensetzt aus:

1. der elektrischen Energiedichte $(1/8\pi)\epsilon_1^2$,
2. der kinetischen Energiedichte auf Grund der Bewegung der Elektronen in der Welle mit einer Geschwindigkeit v , die im linearisierten Fall gegeben ist durch $\frac{1}{2}m n_0 v^2$,
3. der potentiellen Energiedichte auf Grund von Druck- und Dichteschwankungen, die im linearisierten Fall durch $\frac{1}{2}(p_e + p_0)(1 - 1/(1+s))$ gegeben ist¹⁵. Dabei ist p_e der momentane Elektronendruck, $p_0 = n_0 k T = n_0 m v_T^2$ der Gleichgewichtsdruck, $s = \Delta n_e/n_0$ die dimensionslose Schwankung der Elektronendichte in der Welle.

Wegen des adiabatischen Verlaufs der Plasmawellen gilt $(p_e - p_0)/p_0 = \gamma s$, wobei der Adiabatenexponent γ auf Grund der vernachlässigten Stöße formal $= 3$ gesetzt wird¹⁶. Unter der Berücksichtigung, daß s eine kleine Größe ist, folgt:

$$w = \frac{1}{8\pi} \epsilon_1^2 + \frac{1}{2} m n_0 v^2 + \frac{3}{2} m n_0 v_T^2 s^2 + n_0 m v_T^2 s. \quad (66)$$

Da alle Größen wie $\exp(i[l \cdot r - \Omega_1 t])$ variieren, folgt wegen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \epsilon_1 &= -4\pi e n_0 s \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \xi = 0 = \frac{1}{c} \{ \dot{\epsilon}_1 - 4\pi e n_0 v \} \\ s &= -i(l \cdot \epsilon_1) \frac{1}{4\pi e n_0}, \quad v = -i \frac{\Omega_1}{4\pi e n_0} \epsilon_1 \end{aligned} \quad (67)$$

und damit unter Benutzung von (51)

$$\bar{w} = \frac{U^2}{16\pi} \left\{ 1 + \left(\frac{\Omega_1}{\omega_{pe}} \right)^2 + 3 l^2 \lambda_D^2 \right\}.$$

Die Dispersionsrelation für Plasmawellen

$$\Omega_k^2 = \omega_{pe}^2 (1 + 3 k^2 \lambda_D^2) \quad (68) \quad \text{liefert} \quad \bar{w} = (U^2/8\pi) (\Omega_1/\omega_{pe})^2. \quad (69)$$

Wegen (68) ist $d\Omega_k/dk|_{k=l} = 3 v_T^2/v_{ph}(\Omega_1)$ mit $v_{ph}(\Omega_1) = \Omega_1/l$, (70)

also

$$\begin{aligned} \sigma(2\Omega_1) &= \frac{4}{9\pi} \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{4\Omega_1^2} \right)^2 \left(1 + \frac{\Omega_1^2}{\omega_{pe}^2} \right)^2 \frac{v_{ph}(\Omega_1)}{c} \left(\frac{\omega_{pe}}{c} \right)^4 \\ &\quad \cdot \frac{L}{n_0} \frac{1}{(l\lambda_D)^2 + 1} \left\{ \frac{1}{5} + \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{4\Omega_1^2} \right) \left(\frac{\Omega_1}{\omega_{pe}} \right)^2 \left(\frac{v_T}{c} \right)^2 \frac{1}{(l\lambda_D)^2} \right\} \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{9\pi} \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{4\Omega_1^2} \right)^2 \left(1 + \frac{\Omega_1^2}{\omega_{pe}^2} \right)^2 \frac{1}{(l\lambda_D)^2 + 1} \sqrt{3 + (l\lambda_D)^{-2}} \\ &\quad \cdot \left(\frac{v_T}{c} \right)^5 \frac{1}{N_D} \frac{L}{\lambda_D} \left\{ \frac{1}{5} + \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{4\Omega_1^2} \right) \left(\frac{\Omega_1}{\omega_{pe}} \right)^2 \frac{1}{(l\lambda_D)^2} \left(\frac{v_T}{c} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (72)$$

¹⁵ H. LAMB, Hydrodynamics, Cambridge, At the University Press 1932, p. 480.

¹⁶ L. SPITZER, JR., Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publishers, New York 1962.

(62) gilt nur unter der Voraussetzung (59), also wegen $n(\Omega_1 + \Omega_{k_0}) \approx 1$ nur für $(l\lambda_D) \gg v_T/c$. Im Hinblick auf eine spätere Anwendung sollen die Fälle $l\lambda_D \approx v_T/c$ und $l\lambda_D \ll v_T/c$ kurz diskutiert werden.

a) $l\lambda_D \ll v_T/c$: In diesem Fall besteht die Strahlung wieder aus der Überlagerung einer Quadrupol- mit einer schwachen Dipolstrahlung. Die mittlere Gesamtintensität der Quadrupolstrahlung ergibt sich aus dem Quadrupolanteil von (63), wenn man dort $(2\Omega_1/c_0)^2$ durch $\Omega_1^2 v_{ph}^2 (\Omega_1) = l^2$ ersetzt. Die Intensität der Strahlung geht also für $(l\lambda_D) \rightarrow 0$ gegen 0.

β) $l\lambda_D \approx v_T/c$: Es sei $l = [(\Omega_1 + \omega_{pe})/c] n(\Omega_1 + \omega_{pe})$. Dann gilt $k_0 = 0$ für l parallel e . Für $\Phi = \angle(e, l) \lesssim 30^\circ$ gilt grob (62), wenn $(\Omega_1/l c_0 - \cos \Phi)^2 \sin^2 \Phi$ durch $\frac{1}{4} \cos^2 \Phi/2$ ersetzt wird. Für alle anderen Winkel gilt (62), wenn $(\Omega_1/l c_0 - \cos \Phi)^2$ durch $\frac{1}{4} (1 - 2 \cos \Phi)^2$ ersetzt wird. In diesem Falle sind also Quadrupol- und Dipolstrahlung gleich intensiv, außerdem wird in Ausbreitungsrichtung der Plasmawelle stark emittiert. Die mittlere Gesamtintensität ist größenordnungsmäßig wieder durch (63) gegeben.

d) Wechselwirkung einer ebenen Plasmaelektronenwelle mit thermischen Plasmaionenwellen

Die Streuung wird durch die Grundgleichung (10) beschrieben. Bei Vernachlässigung der Rückwirkung der Streuung kann im Quellterm $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{L0}$ gesetzt werden. Wegen $\mathcal{E}_{L0} + 4\pi e(N_i \bar{v}_i - N_e \bar{v}_e) = 0$ und $\text{div } \mathcal{E}_{L0} = 4\pi e(N_i - N_e)$ folgt aus (10):

$$\begin{aligned} & \left\{ c^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Omega_p^2 \right\} \mathcal{E}_T - \frac{1}{e n_0} \text{grad}(\omega_{pe}^2 p_e - \omega_{pi}^2 p_i) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega_p^2 \right) \mathcal{E}_L \\ &= -\frac{e}{m} \mathcal{E}_{L0} \text{div } \mathcal{E}_{L0} + \Omega_p^2 \frac{N_i - n_0}{n_0} \mathcal{E}_{L0} + \frac{1}{4\pi e N_e} \mathcal{E}_{L0} \text{div } \mathcal{E}_{L0} \\ &+ \frac{N_i}{N_e} \bar{v}_i \text{div } \mathcal{E}_{L0} - \frac{1}{N_e} \mathcal{E}_{L0} \frac{\partial N_i}{\partial t} - \text{div } \mathcal{E}_{L0} \text{grad } \frac{1}{2} \bar{v}_e^2 - \frac{1}{N_e} \text{div } \mathcal{E}_{L0} \bar{v}_i \frac{\partial N_i}{\partial t} + 4\pi e N_i \text{grad } \frac{1}{2} \{ \bar{v}_e^2 - \bar{v}_i^2 \} \\ &= -\frac{e}{m} \mathcal{E}_{L0} \text{div } \mathcal{E}_{L0} + \Omega_p^2 \frac{N_i - n_0}{n_0} \mathcal{E}_{L0} + \frac{e}{m} \omega_{pe}^{-2} \mathcal{E}_{L0} \text{div } \mathcal{E}_{L0} \frac{1}{(N_e - n_0)/n_0 + 1} \\ &+ \frac{(N_i - n_0)/n_0 + 1}{(N_e - n_0)/n_0 + 1} \bar{v}_i \text{div } \mathcal{E}_{L0} - \frac{1}{(N_e - n_0)/n_0 + 1} \mathcal{E}_{L0} \frac{\partial((N_i - n_0)/n_0)}{\partial t} \\ &- \left(\frac{N_e - n_0}{n_0} + 1 \right)^{-1} \bar{v}_i \text{div } \mathcal{E}_{L0} \frac{\partial((N_i - n_0)/n_0)}{\partial t} - \text{div } \mathcal{E}_{L0} \text{grad } \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{E}_{L0}^2 (4\pi n_0 e)^{-2} \left(\frac{N_e - n_0}{n_0} + 1 \right)^{-2} \right. \\ &+ \left. \left(\frac{N_i - n_0}{n_0} + 1 \right)^2 \left(\frac{N_e - n_0}{n_0} + 1 \right)^{-2} \bar{v}_i^2 + \mathcal{E}_{L0} \cdot \bar{v}_i \frac{((N_i - n_0)/n_0 + 1)}{((N_e - n_0)/n_0 + 1)^2} (2\pi e n_0)^{-1} \right\} \\ &+ 4\pi e \frac{N_i - n_0}{n_0} \text{grad } \frac{1}{2} \left\{ n_0 \bar{v}_i^2 \left[\left(\frac{(N_i - n_0)/n_0 + 1}{(N_e - n_0)/n_0 + 1} \right)^2 - 1 \right] \right. \\ &+ \left. \frac{\mathcal{E}_{L0} \cdot \bar{v}_i ((N_i - n_0)/n_0 + 1)}{2\pi e ((N_e - n_0)/n_0 + 1)^2} + \frac{(\mathcal{E}_{L0}^2 n_0)}{(4\pi e n_0)^2 ((N_e - n_0)/n_0 + 1)^2} \right\} + 4\pi e n_0 \text{grad } \frac{1}{2} (\bar{v}_e^2 - \bar{v}_i^2). \end{aligned} \quad (73)$$

Im Quellterm treten die Entwicklungsparameter $s_i = (N_i - n_0)/n_0$ und $s_i - (4\pi e n_0)^{-1} \text{div } \mathcal{E}_{L0} = (N_e - n_e)/n_0$ auf. Aus (IV b) läßt sich in Analogie zur Berechnung von $\langle \mathcal{E}_e^2/8\pi \rangle$ die Größe $\langle s_i^2 \rangle$ ermitteln. Wählt man in dem entsprechenden Integral die Integrationsgrenzen $(k\lambda_D) = 0$ bzw. 1, so folgt $\langle s_i^2 \rangle \approx N_D^{-1}$.

Außerdem gilt

$$(1/4\pi e n_0) \text{div } \mathcal{E}_{L0} \approx (1/4\pi e n_0) \psi/\lambda_D^2 = e\psi/\kappa T,$$

wenn ψ wieder das Potential des gesamten elektrischen Feldes ist. ψ setzt sich zusammen aus dem Potential φ der einfallenden Plasmawelle und dem Potential φ_{th} der thermischen Ionenwellen. Aus (48) folgt durch Integration über $(k\lambda_D)$ von 0 bis 1: $\varphi_{th} \approx |\mathcal{E}_i| \lambda_D \approx (e/\lambda_D) N_D^{1/2}$. Somit kann – in Analogie zu (53) – $\psi \approx \varphi$ gesetzt werden, solange $e\varphi/\kappa T \gg N_D^{-1/2}$ ist. Wegen $V/\langle s_i \rangle \approx N_D^{-1/2}$ folgt dann $e\varphi/\kappa T \approx (N_e - n_0)/n_0$. Damit ergibt sich: solange (53) und (54) erfüllt sind, braucht man im Quellterm der Gl. (73) nur quadratische Glieder zu berücksichtigen.

$$\begin{aligned} & \left(c^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Omega_p^2 \right) \mathcal{E}_T - \frac{1}{e n_0} \text{grad}(\omega_{pe}^2 p_e - \omega_{pi}^2 p_i) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega_p^2 \right) \mathcal{E}_L \\ &= -\frac{e}{m} \mathcal{E}_{L0} \text{div } \mathcal{E}_{L0} + \Omega_p^2 s_i \mathcal{E}_{L0} + \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_{pe}^2} \mathcal{E}_{L0} \text{div } \mathcal{E}_{L0} \\ &+ \bar{v}_i \text{div } \mathcal{E}_{L0} - \mathcal{E}_{L0} \frac{\partial s_i}{\partial t} + 4\pi e n_0 \text{grad } \frac{1}{2} (\bar{v}_e^2 - \bar{v}_i^2). \end{aligned} \quad (74)$$

Einsetzen von $\mathfrak{E}_{L0} = \mathbf{e}_1 + \mathfrak{E}_i(r, t)$, wobei \mathbf{e}_1 durch (51) und \mathfrak{E}_i durch (50) gegeben sind, liefert:

$$= -\frac{e}{m} \{ \mathbf{e}_1 \operatorname{div} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \operatorname{div} \mathfrak{E}_i + \mathfrak{E}_i \operatorname{div} \mathbf{e}_1 + \mathfrak{E}_i \operatorname{div} \mathfrak{E}_i \} + \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_{pe}^2} \{ \dot{\mathbf{e}}_1 \operatorname{div} \dot{\mathbf{e}}_1 + \dot{\mathbf{e}}_1 \operatorname{div} \dot{\mathfrak{E}}_i + \dot{\mathfrak{E}}_i \operatorname{div} \dot{\mathbf{e}}_1 + \dot{\mathfrak{E}}_i \operatorname{div} \dot{\mathfrak{E}}_i \} \\ + \bar{v}_i' \operatorname{div} \dot{\mathbf{e}}_1 + \bar{v}_i \operatorname{div} \dot{\mathfrak{E}}_i - \dot{\mathbf{e}}_1 \frac{\partial s_i}{\partial t} - \dot{\mathfrak{E}}_i \frac{\partial s_i}{\partial t} + 4\pi e n_0 \operatorname{grad} \frac{1}{2} (\bar{v}_e^2 - \bar{v}_i^2) + \Omega_p^2 s_i \mathfrak{E}_i + \Omega_p^2 s_i \mathbf{e}_1.$$

Mit Hilfe der Beziehungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{E}_i = 4\pi e n_0 (s_i - s_{ei}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_i + 4\pi e n_0 (\bar{v}_i - \bar{v}_{ei}) = 0$$

– in der zweiten linearisierten Gleichung bedeutet \bar{v}_{ei} die Strömung der Elektronen in den thermischen Ionenwellen – folgt:

$$= -\frac{e}{m} \{ \mathbf{e}_1 \operatorname{div} \mathbf{e}_1 + \mathfrak{E}_i \operatorname{div} \mathfrak{E}_i + \mathfrak{E}_i \operatorname{div} \mathbf{e}_1 \} + \frac{e}{M} \mathbf{e}_1 \operatorname{div} \mathfrak{E}_i \\ + \Omega_p^2 s_i \mathfrak{E}_i + \Omega_p^2 s_{ei} \mathbf{e}_1 + \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_{pe}^2} \{ \dot{\mathbf{e}}_1 \operatorname{div} \dot{\mathbf{e}}_1 + \dot{\mathfrak{E}}_i \operatorname{div} \dot{\mathfrak{E}}_i \} \\ - \dot{\mathbf{e}}_1 \frac{\partial s_{ei}}{\partial t} - \dot{\mathfrak{E}}_i \frac{\partial s_{ei}}{\partial t} + \bar{v}_{ei} \operatorname{div} \mathfrak{E}_i + \bar{v}_{ei} \operatorname{div} \dot{\mathbf{e}}_1 + 4\pi n_0 e \operatorname{grad} \frac{1}{2} (\bar{v}_e^2 - \bar{v}_i^2). \quad (75)$$

Unter Vernachlässigung der Selbstwechselwirkung der thermischen Ionenwellen, was im Falle der Gültigkeit von (53) sicher richtig ist, liefert Rotationsbildung von (75) wegen $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = \operatorname{rot} \mathfrak{E}_T = -(1/c) \partial \mathfrak{H} / \partial t$:

$$-c \left[\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \Omega_p^2 \right] \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\frac{e}{m} \Delta \mathbf{e}_1 \times \mathfrak{E}_i + \frac{e}{M} \Delta \mathfrak{E}_i \times \mathbf{e}_1 \\ + \Omega_p^2 \operatorname{grad} s_{ei} \times \mathbf{e}_1 - \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} s_{ei}) \times \dot{\mathbf{e}}_1 + \Delta \dot{\mathbf{e}}_1 \times \bar{v}_{ei}. \quad (76)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} \bar{v}_{ei} + \partial s_{ei} / \partial t = 0$ für die Elektronen der thermischen Ionenwellen folgt aus (43):

$$\bar{v}_{ei} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \int \frac{\mathfrak{f}}{k} \frac{\omega_k}{k} J_2(k) [\delta(\omega - \omega_k) - \delta(\omega + \omega_k)] e^{i(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \delta_{ki})} d\omega d^3\mathfrak{f}. \quad (77)$$

Nach Ersetzen der einzelnen Größen aus (43), (50), (51) und (77) folgt durch zeitliche Integration aus (76) eine Differentialgleichung der Form (22) mit

$$\mathfrak{S} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int [J_6(k) \mathfrak{f} \times \mathbf{l} \{ e^{i[(\mathbf{l}+\mathbf{f}) \cdot \mathbf{r} - (\Omega_1 + \omega_k) t - \delta_{ki}]} + e^{-i[(\mathbf{l}+\mathbf{f}) \cdot \mathbf{r} - (\Omega_1 + \omega_k) t - \delta_{ki}]} \} - J_7(k) \mathfrak{f} \times \mathbf{l} \\ \cdot \{ e^{i[(\mathbf{l}-\mathbf{f}) \cdot \mathbf{r} - (\Omega_1 - \omega_k) t + \delta_{ki}]} + e^{-i[(\mathbf{l}-\mathbf{f}) \cdot \mathbf{r} - (\Omega_1 - \omega_k) t + \delta_{ki}]} \}] d^3\mathfrak{f}, \quad (78)$$

$$J_6(k) = \frac{U}{2c} \frac{1}{\Omega_1 + \omega_k} \left[J_3(k) \left\{ \omega_{pe}^2 \frac{l}{k^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{l} \right\} + J_2(k) \{ \omega_{pe}^2 + \omega_k \Omega_1 \} \cdot \left\{ \frac{1}{l} - \frac{l}{k^2} \right\} \right] \\ \text{und} \quad J_7(k) = \frac{U}{2c} \frac{1}{\Omega_1 - \omega_k} \left[J_3(k) \left\{ \omega_{pe}^2 \frac{l}{k^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{l} \right\} + J_2(k) \left\{ \frac{1}{l} - \frac{l}{k^2} \right\} \cdot \{ \omega_{pe}^2 - \omega_k \Omega_1 \} \right]. \quad (79)$$

Auch diesmal treten im Quellvektor (78) Summe und Differenz der Frequenzen der wechselwirkenden Wellen auf. Da $\Omega_1 \gg \omega_k$ ist, tragen hier im Gegensatz zu (23) beide Anteile zur Radioemission bei. Die Lösung von (22) mit (78) ergibt sich aus (35), wenn die zeitliche FOURIER-Komponente von (78) gebildet wird:

$$\mathfrak{S}_\omega = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int [J_6(k) \mathfrak{f} \times \mathbf{l} \{ \delta(\omega - \Omega_1 - \omega_k) e^{i[(\mathbf{l}+\mathbf{f}) \cdot \mathbf{r} - \delta_{ki}]} + \delta(\omega + \Omega_1 + \omega_k) e^{-i[(\mathbf{l}+\mathbf{f}) \cdot \mathbf{r} - \delta_{ki}]} \} \\ - J_7(k) \mathfrak{f} \times \mathbf{l} \{ \delta(\omega - (\Omega_1 - \omega_k)) e^{i[(\mathbf{l}-\mathbf{f}) \cdot \mathbf{r} + \delta_{ki}]} + \delta(\omega + \Omega_1 - \omega_k) e^{-i[(\mathbf{l}-\mathbf{f}) \cdot \mathbf{r} + \delta_{ki}]} \}] d^3\mathfrak{f}. \quad (80)$$

Nach (35) folgt

$$\mathfrak{S} = -\frac{1}{4\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t-r/c)} \int_V \int_{-\infty}^{+\infty} [J_6(k) \mathfrak{f} \times \mathbf{l} \{ \delta(\omega - \Omega_1 - \omega_k) \cdot \exp \{ i[(\mathbf{l} + \mathbf{f} - (\omega/c') \mathbf{e}) \cdot \mathbf{r}' - \delta_{ki}] \} \\ + \delta(\omega + \Omega_1 + \omega_k) \exp \{ -i[(\mathbf{l} + \mathbf{f} + (\omega/c') \mathbf{e}) \cdot \mathbf{r}' - \delta_{ki}] \} \} \\ - J_7(k) \mathfrak{f} \times \mathbf{l} \{ \delta(\omega - \Omega_1 + \omega_k) \exp \{ i[(\mathbf{l} - \mathbf{f} - (\omega/c') \mathbf{e}) \cdot \mathbf{r}' + \delta_{ki}] \} \\ + \delta(\omega + \Omega_1 - \omega_k) \exp \{ -i[(\mathbf{l} - \mathbf{f} + (\omega/c') \mathbf{e}) \cdot \mathbf{r}' + \delta_{ki}] \} \}] d^3\mathfrak{f} d^3\mathbf{r}' d\omega, \quad (81)$$

und die ω -Integration liefert:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = & -\frac{1}{4\pi r} \int_V \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{f} \times \mathfrak{l} [J_6(k) \{ \exp\{i[(\mathfrak{l} + \mathfrak{f} - (\Omega_1 + \omega_k)/c') \cdot \mathbf{r}' - \delta_{ki}]\} \cdot \exp\{-i(\Omega_1 + \omega_k)(t - (r/c))\} \\ & + \exp\{-i[(\mathfrak{l} + \mathfrak{f} - (\Omega_1 + \omega_k)/c') \cdot \mathbf{r}' - \delta_{ki}]\} \cdot \exp\{i(\Omega_1 + \omega_k)(t - (r/c))\} \} \\ & - J_7(k) \{ \exp\{i[(\mathfrak{l} - \mathfrak{f} - (\Omega_1 - \omega_k)/c') \cdot \mathbf{r}' + \delta_{ki}]\} \cdot \exp\{-i(\Omega_1 - \omega_k)(t - (r/c))\} \\ & + \exp\{-i[(\mathfrak{l} - \mathfrak{f} - (\Omega_1 - \omega_k)/c') \cdot \mathbf{r}' + \delta_{ki}]\} \cdot \exp\{i(\Omega_1 - \omega_k)(t - (r/c))\} \}] d^3\mathfrak{f} d^3\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (82)$$

Das Integral über das Volumen liefert wieder die δ -Funktion, so daß sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = & -\frac{1}{4\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2(2\pi)^3 \mathfrak{f} \times \mathfrak{l} [J_6(k) \cos[(\Omega_1 + \omega_k)(t - (r/c)) + \delta_{ki}] \cdot \delta(\mathfrak{l} + \mathfrak{f} - (\Omega_1 + \omega_k)/c') \mathbf{e} \\ & - J_7(k) \cos[(\Omega_1 - \omega_k)(t - (r/c)) - \delta_{ki}] \cdot \delta(\mathfrak{l} - \mathfrak{f} - (\Omega_1 - \omega_k)/c') \mathbf{e}] d^3\mathfrak{f}. \end{aligned} \quad (83)$$

ergibt. Auch hier tragen, wie (83) zeigt, zur Emission nur solche Inhomogenitäten bei, deren charakteristische Dimension gleich der Wellenlänge der einfallenden Plasmawelle ist. Für die pro sec in den Raumwinkel \mathfrak{l} abgestrahlte Energie erhält man aus (36) nach Ausübung der \mathfrak{f} -Integration in (83):

$$\begin{aligned} I = & 4\pi^3 c (\mathbf{e} \times \mathfrak{l})^2 \left[J_6(k_1) \frac{\Omega_1 + \omega_{k_1}}{c_1'} \cos[(\Omega_1 + \omega_{k_1})(t - (r/c)) + \delta_{k_1 i}] \right. \\ & \left. + J_7(k_2) \frac{\Omega_1 - \omega_{k_2}}{c_2'} \cos[(\Omega_1 - \omega_{k_2})(t - (r/c)) - \delta_{k_2 i}] \right]^2 \end{aligned} \quad (84)$$

mit $\mathfrak{f}_1 = -\mathfrak{l} + [(\Omega_1 + \omega_{k_1})/c_1'] \mathbf{e}; \quad \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{l} - [(\Omega_1 - \omega_{k_2})/c_2'] \mathbf{e};$
 $\omega_{k_1} = \omega_k \text{ für } k = k_1; \quad \omega_{k_2} = \omega_k \text{ für } k = k_2;$

für $\omega = \Omega_1 + \omega_{k_1}: \quad c_1' = c' = \frac{c}{\sqrt{1 - \Omega_p^2/(\Omega_1 + \omega_{k_1})^2}} = \frac{c}{n(\Omega_1 + \omega_{k_1})}, \quad (85)$

für $\omega = \Omega_1 - \omega_{k_2}: \quad c_2' = c' = \frac{c}{\sqrt{1 - \Omega_p^2/(\Omega_1 - \omega_{k_2})^2}} = \frac{c}{n(\Omega_1 - \omega_{k_2})}.$

Durch Einsetzen von (77), (42) folgt aus (84):

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{16\pi^2 8\pi} V \left(\frac{v_T}{c} \right)^2 \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 + \omega_{k_1})^2} \right) \frac{\omega_{pe}^2}{n_0 c} \frac{(k_1 \lambda_D)^2 + 1}{(k_1 \lambda_D)^2 + 2} (\mathbf{e} \times \mathfrak{l})^2 \\ & \cdot \left[\left\{ 1 - \left(\frac{l}{k_1} \right)^2 \right\} \left(1 + \frac{\Omega_1 \omega_{k_1}}{\omega_{pe}^2} \right) \frac{1}{l \lambda_D} \frac{1}{(k_1 \lambda_D)^2 + 1} + \frac{l^2/k_1^2 + m/M}{l \lambda_D} \right]^2 \cdot \cos^2[(\Omega_1 + \omega_{k_1})(t - (r/c)) + \delta_{k_1 i}] \\ & + \frac{1}{16\pi^2 8\pi} V \left(\frac{v_T}{c} \right)^2 \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 - \omega_{k_2})^2} \right) \frac{\omega_{pe}^2}{n_0 c} \frac{(k_2 \lambda_D)^2 + 1}{(k_2 \lambda_D)^2 + 2} \\ & \cdot (\mathbf{e} \times \mathfrak{l})^2 \left[\left\{ 1 - \left(\frac{l}{k_2} \right)^2 \right\} \left(1 - \frac{\Omega_1 \omega_{k_2}}{\omega_{pe}^2} \right) \frac{1}{l \lambda_D} \frac{1}{(k_2 \lambda_D)^2 + 1} + \frac{(l/k_2)^2 + m/M}{l \lambda_D} \right]^2 \\ & \cdot \cos^2[(\Omega_1 - \omega_{k_2})(t - (r/c)) - \delta_{k_2 i}] \\ & + 4\pi^3 c \frac{\Omega_1 + \omega_{k_1}}{c_1'} \frac{\Omega_1 - \omega_{k_2}}{c_2'} J_6(k_1) J_7(k_2) (\mathbf{e} \times \mathfrak{l})^2 \cdot \{ \cos[(2\Omega_1 + \omega_{k_1} - \omega_{k_2})(t - (r/c)) + \delta_{k_1 i} - \delta_{k_2 i}] \\ & + \cos[(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t - (r/c)) + \delta_{k_1 i} + \delta_{k_2 i}] \}. \end{aligned} \quad (86)$$

Der zeitliche Mittelwert des letzten Terms über eine Periode verschwindet. Die Strahlung besteht offenbar aus den 2 Anteilen $I^1(\Omega_1)$ und $I^2(\Omega_1)$ mit den Frequenzen $\Omega_1 + \omega_{k_1}$ und $\Omega_1 - \omega_{k_2}$. Wenn $l \lambda_D \gg (1 - \Omega_p^2/\Omega_1^2) (v_T/c)$, gilt $l \gg (\Omega_1 + \omega_{k_1}) (c_1')^{-1}$ bzw. $l \gg (\Omega_1 - \omega_{k_2}) (c_2')^{-1}$ (87), da sicher $\Omega_1 \gg \omega_{k_1}, \omega_{k_2}$ ist. Daher kann $k_1 \approx l \approx k_2$ gesetzt werden, solange es nicht auf die Differenz $l^2 - k_{1,2}^2$ ankommt. Insbesondere ist also $\omega_{k_1} \approx \omega_{k_2} = \Omega$. Bezeichnet man den Winkel zwischen der Richtung der einfallenden Plasmawelle und der Abstrahlrichtung mit Φ , $\Phi = \angle(\mathbf{e}, \mathfrak{l})$, so ergibt sich mit (87):

$$\begin{aligned} I^1(\Omega_1) = & \frac{1}{16\pi^2 8\pi} V \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 + \Omega)^2} \right) \frac{(l \lambda_D)^2 + 1}{(l \lambda_D)^2 + 2} \frac{\omega_{pe}^4}{n_0 c^3} \left[1 - \left(\frac{\Omega_1 + \Omega}{l c_1'} \right)^2 + \frac{m}{M} + \left(\frac{\Omega_1 + \Omega}{l c_1'} \right)^2 \frac{1 + \Omega_1 \Omega \omega_{pe}^{-2}}{(l \lambda_D)^2 + 1} \right. \\ & \left. + 2 \cos \Phi \frac{\Omega + \Omega_1}{l c_1'} \left\{ 1 - \frac{1 + \Omega_1 \Omega \omega_{pe}^{-2}}{(l \lambda_D)^2 + 1} \right\} \right]^2 \sin^2 \Phi \cdot \cos^2[(\Omega + \Omega_1)(t - (r/c)) + \delta_{k_1 i}], \end{aligned} \quad (88)$$

$$I^2(\Omega_1) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{U^2}{8\pi} V \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 - \Omega)^2} \right) \frac{(l\lambda_D)^2 + 1}{(l\lambda_D)^2 + 2} \frac{\omega_{pe}^4}{c^3 n_0} \left[1 + \frac{m}{M} - \left(\frac{\Omega_1 - \Omega}{l c_2'} \right)^2 + \left(\frac{\Omega_1 - \Omega}{l c_2'} \right)^2 \frac{1 - \Omega_1 \Omega \omega_{pe}^{-2}}{(l\lambda_D)^2 + 1} \right. \\ \left. + 2 \cos \Phi \frac{\Omega_1 - \Omega}{l c_2'} \left\{ 1 - \frac{1 - \Omega_1 \Omega \omega_{pe}^{-2}}{(l\lambda_D)^2 + 1} \right\} \right]^2 \sin^2 \Phi \cdot \cos^2 [(\Omega_1 - \Omega)(t - (r/c)) - \delta_{kzi}]. \quad (89)$$

Es liegt wieder eine Überlagerung einer Quadrupol- mit einer Dipolstrahlung vor, wobei im Gegensatz zu (62) die Quadrupolstrahlung schwach ist. Durch Mittelung über eine Periode und Integration über den Raumwinkel ergeben sich die mittleren Gesamtintensitäten $\bar{I}^1(\Omega_1)$ und $\bar{I}^2(\Omega_1)$:

$$\bar{I}^1(\Omega_1) = \frac{1}{12\pi} \frac{U^2}{8\pi} V \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 + \Omega)^2} \right) \frac{(l\lambda_D)^2 + 1}{(l\lambda_D)^2 + 2} \frac{\omega_{pe}^4}{n_0 c^3} \left\{ \left[1 + \frac{m}{M} - \left(\frac{\Omega_1 + \Omega}{l c} \right)^2 \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 + \Omega)^2} \right) \frac{(l\lambda_D)^2 - \Omega_1 \Omega \omega_{pe}^{-2}}{(l\lambda_D)^2 + 1} \right]^2 \right. \\ \left. + \frac{4}{5} \left(\frac{\Omega_1 + \Omega}{l c} \right)^2 \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 + \Omega)^2} \right) \left[\frac{(l\lambda_D)^2 - \Omega_1 \Omega \omega_{pe}^{-2}}{(l\lambda_D)^2 + 1} \right]^2 \right\}, \quad (90)$$

$$\bar{I}^2(\Omega_1) = \frac{1}{12\pi} \frac{U^2}{8\pi} V \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 - \Omega)^2} \right) \frac{(l\lambda_D)^2 + 1}{(l\lambda_D)^2 + 2} \frac{\omega_{pe}^4}{n_0 c^3} \left\{ \left[1 + \frac{m}{M} - \left(\frac{\Omega_1 - \Omega}{l c} \right)^2 \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 - \Omega)^2} \right) \frac{(l\lambda_D)^2 + \Omega_1 \Omega \omega_{pe}^{-2}}{(l\lambda_D)^2 + 1} \right]^2 \right. \\ \left. + \frac{4}{5} \left(\frac{\Omega_1 - \Omega}{l c} \right)^2 \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 - \Omega)^2} \right) \left[\frac{(l\lambda_D)^2 + \Omega_1 \Omega \omega_{pe}^{-2}}{(l\lambda_D)^2 + 1} \right]^2 \right\}. \quad (91)$$

Wegen (87) ist der Quadrupolterm vernachlässigbar. Außerdem überwiegt beim Dipolteil nur der erste Term. Berücksichtigt man noch $m/M \ll 1$, so gilt in guter Näherung:

$$\bar{I}^1(\Omega_1) = \frac{1}{12\pi} \frac{U^2}{8\pi} V \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 + \Omega)^2} \right) \frac{(l\lambda_D)^2 + 1}{(l\lambda_D)^2 + 2} \frac{\omega_{pe}^4}{n_0 c^3}, \quad (92)$$

$$\bar{I}^2(\Omega_1) = \frac{1}{12\pi} \frac{U^2}{8\pi} V \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 - \Omega)^2} \right) \frac{(l\lambda_D)^2 + 1}{(l\lambda_D)^2 + 2} \frac{\omega_{pe}^4}{n_0 c^3}. \quad (93)$$

Definiert man entsprechend (64) Streukoeffizienten, so folgt aus (90) und (91) nach (65), (69) und (70):

$$\sigma^1(\Omega_1) = \frac{1}{36\pi} \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 + \Omega)^2} \right) \frac{(l\lambda_D)^2 + 1}{(l\lambda_D)^2 + 2} \left(\frac{\omega_{pe}}{\Omega_1} \right)^2 \frac{v_{ph}(\Omega_1)}{c} \left(\frac{c}{v_T} \right)^2 \frac{\omega_{pe}^4}{c^3} \\ \cdot \frac{L}{n_0} \left\{ \left[1 + \frac{m}{M} - \left(\frac{\Omega_1 + \Omega}{l c} \right)^2 \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 + \Omega)^2} \right) \frac{(l\lambda_D)^2 - \Omega_1 \Omega \omega_{pe}^{-2}}{(l\lambda_D)^2 + 1} \right]^2 \right. \\ \left. + \frac{4}{5} \left(\frac{\Omega_1 + \Omega}{l c} \right)^2 \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 + \Omega)^2} \right) \left[\frac{(l\lambda_D)^2 - \Omega_1 \Omega \omega_{pe}^{-2}}{(l\lambda_D)^2 + 1} \right]^2 \right\}, \quad (94)$$

$$\sigma^2(\Omega_1) = \frac{1}{36\pi} \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 - \Omega)^2} \right) \frac{(l\lambda_D)^2 + 1}{(l\lambda_D)^2 + 2} \left(\frac{\omega_{pe}}{\Omega_1} \right)^2 \frac{v_{ph}(\Omega_1)}{c} \left(\frac{c}{v_T} \right)^2 \frac{\omega_{pe}^4}{c^3} \\ \cdot \frac{L}{n_0} \left\{ \left[1 + \frac{m}{M} - \left(\frac{\Omega_1 - \Omega}{l c} \right)^2 \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 - \Omega)^2} \right) \frac{(l\lambda_D)^2 + \Omega_1 \Omega \omega_{pe}^{-2}}{(l\lambda_D)^2 + 1} \right]^2 \right. \\ \left. + \frac{4}{5} \left(\frac{\Omega_1 - \Omega}{l c} \right)^2 \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 - \Omega)^2} \right) \left[\frac{(l\lambda_D)^2 + \Omega_1 \Omega \omega_{pe}^{-2}}{(l\lambda_D)^2 + 1} \right]^2 \right\}. \quad (95)$$

In guter Näherung kann dafür in Anlehnung an (92) und (93)

$$\sigma^1(\Omega_1) = \frac{1}{36\pi} \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 + \Omega)^2} \right) \frac{(l\lambda_D)^2 + 1}{(l\lambda_D)^2 + 2} \left(\frac{\omega_{pe}}{\Omega_1} \right)^2 \frac{v_{ph}(\Omega_1)}{c} \left(\frac{c}{v_T} \right)^2 \left(\frac{\omega_{pe}}{c} \right)^4 \frac{L}{n_0} \quad (96)$$

$$= \frac{1}{36\pi} \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 + \Omega)^2} \right) \frac{(l\lambda_D)^2 + 1}{(l\lambda_D)^2 + 2} \sqrt{3 + (l\lambda_D)^{-2}} \left(\frac{v_T}{c} \right)^3 \frac{1}{N_D} \frac{L}{\lambda_D}, \quad (97)$$

$$\sigma^2(\Omega_1) = \frac{1}{36\pi} \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 - \Omega)^2} \right) \frac{(l\lambda_D)^2 + 1}{(l\lambda_D)^2 + 2} \left(\frac{\omega_{pe}}{\Omega_1} \right)^2 \frac{v_{ph}(\Omega_1)}{c} \left(\frac{c}{v_T} \right)^2 \left(\frac{\omega_{pe}}{c} \right)^4 \frac{L}{n_0} \quad (98)$$

$$= \frac{1}{36\pi} \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 - \Omega)^2} \right) \frac{(l\lambda_D)^2 + 1}{(l\lambda_D)^2 + 2} \sqrt{3 + (l\lambda_D)^{-2}} \left(\frac{v_T}{c} \right)^3 \frac{1}{N_L} \frac{L}{\lambda_D} \quad (99)$$

geschrieben werden.

e) Darstellung und Diskussion der Ergebnisse

Wird eine ebene Plasmaelektronenwelle mit der Frequenz Ω_1 in einem Plasma angeregt, so trifft sie auf die thermischen Dichteschwankungen der Elektronen und Ionen. Es entsteht eine Radiostrahlung, wobei nur solche Inhomogenitäten wichtig sind, deren charakteristische Länge mit der Wellenlänge der einfallenden Welle übereinstimmt. Die Wechselwirkung mit den Elektronendichteschwankungen in den Plasmaelektronenwellen liefert eine Radioemission der Frequenz $2\Omega_1$ mit dem Charakter einer Quadrupolstrahlung, der eine schwache Dipolstrahlung überlagert ist. Die mittlere Gesamtintensität ist durch (63) gegeben. Die Wechselwirkung mit den Elektronen- und Ionendichteschwankungen in den Plasmaionenwellen ergibt Abstrahlungen bei zwei benachbarten Frequenzen $\Omega_1 + \Omega$ und $\Omega_1 - \Omega$. Hierbei ist Ω durch Ω_1 festgelegt und kann die Plasmaionenfrequenz nicht überschreiten. Beide Male liegt eine Dipolstrahlung vor, der eine schwache Quadrupolstrahlung überlagert ist. Die mittleren Gesamtintensitäten, die in (90) und (91) angegeben sind, stimmen überein, solange Ω_1 nicht zu nahe bei der Frequenz $\Omega_p = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}$ liegt.

Zum Vergleich der bei Ω_1 und $2\Omega_1$ emittierten Intensitäten gehen wir von (63) und einer der beiden Gln. (90), (91) bzw. den Näherungen (92), (93) aus. Unter Vernachlässigung des Dipolterms in (63) folgt:

$$\frac{\bar{I}^1(\Omega_1)}{\bar{I}(2\Omega_1)} = \frac{\sigma^1(\Omega_1)}{\sigma(2\Omega_1)} = G \left(\frac{c}{v_T} \right)^2 \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 + \Omega)^2} \right) \quad (100)$$

mit

$$G = \frac{5}{16} \frac{[(l\lambda_D)^2 + 1]^2}{(l\lambda_D)^2 + 2} \left(\frac{\omega_{ne}}{\Omega_1} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{4\Omega_1^2} \right)^{-2} \left(1 + \frac{\Omega_1^2}{\omega_{pe}^2} \right)^{-2} \approx 0,14.$$

Für das Verhältnis (100) ist also der Ausdruck $1 - \Omega_p^2/(\Omega_1 + \Omega)^2$ entscheidend. Für Ω genügt die Näherung (SPITZER¹⁶; DRUMMOND¹⁷)

$$\Omega = l\lambda_D [(l\lambda_D)^2 + 1]^{-1/2} \omega_{pi}.$$

Ω_1 ist durch $\Omega_1^2 = \frac{1}{2} \omega_{pe}^2 [1 + \sqrt{1 + 12(l\lambda_D)^2}]$ bzw. die entsprechende Näherungsformel (68) gegeben. Danach ergibt sich:

$l\lambda_D$	0,5	10^{-1}	$5 \cdot 10^{-2}$
$1 - \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_1 + \Omega)^2}$	0,33	$3,4 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$

Tab. 2. Abhängigkeit von $1 - \Omega_p^2/(\Omega_1 + \Omega)^2$ von $l\lambda_D$.

Die Emission ist bei der Frequenz Ω_1 wesentlich intensiver als bei $2\Omega_1$. Unter Koronabedingungen wird $G(c/v_T)^2 \approx 496$, so daß für $l\lambda_D = 0,5$ der Unterschied zwei Größenordnungen und für $l\lambda_D = 10^{-1}$ eine Größenordnung beträgt. Für $l\lambda_D = 5 \cdot 10^{-2} \approx v_T/c$ ist das Verhältnis am günstigsten, obwohl auch hier $\bar{I}^1(\Omega_1)$ größer ist. Für noch kleinere $l\lambda_D$ gilt (100) nicht mehr, da (63) nur für $l\lambda_D \gtrsim v_T/c$ gilt. Zu beachten ist, daß in diesen Betrachtungen die Absorption auf Grund von Teilchenstößen, die für $\Omega_1 \rightarrow \Omega_p$ wichtig sind, vernachlässigt wurde.

Der Grund dafür, daß die Streuung an den thermischen Ionenwellen wesentlich effektiver ist als die an den thermischen Elektronenwellen, liegt darin, daß im zweiten Fall die Wechselwirkung symmetrisch ist, da gleichwertige Wellen aufeinandertreffen. Es ist denkbar, daß eine „künstlich“ induzierte Asymmetrie, etwa mit Hilfe eines äußeren Magnetfeldes, dieses Verhalten ändern, also die Intensität der Streustrahlung bei $2\Omega_1$ erhöhen könnte.

Wesentliche Voraussetzung der Rechnungen war, daß die Rückwirkung der Strahlung auf das Plasma vernachlässigbar ist. Das läßt sich nachträglich mit Hilfe der Streukoeffizienten (72) bzw. (96) bis (99) rechtfertigen. Für die Sonnenkorona erhält man mit Hilfe von Tab. 1 $\sigma(2\Omega_1) \approx 10^{-7}$ und damit nach dem obigen $\sigma^1(\Omega_1) \approx 10^{-5}$ bis 10^{-7} . Dabei wurde für die charakteristische Länge $L = 10^{10}$ cm eingesetzt, entsprechend dem Winkeldurchmesser des Typ III von 3'–12' (WILD, SMERD und WEISS¹).

V. Vergleich mit anderen Theorien

In den folgenden Vergleichen werden der schwache Dipolterm in (63) bzw. der Quadrupolterm in (90) vernachlässigt.

GINZBURG und ZHELEZNIakov⁹ betrachten die Streuung einer Plasmawelle der Frequenz Ω_1 an Fluktuationen der Dielektrizitätskonstanten, die ihre Ursache haben in thermischen Massen- und Ladungsdichteschwankungen. Für die Abschätzung der Gesamtintensitäten werden die entsprechenden Formeln für die Streuung elektromagnetischer Wellen verwendet. Die Frequenz der entstehenden elektromagnetischen Strahlung liegt für die Massendichteschwankungen bei Ω_1 (RAYLEIGH-Streuung), für die Ladungsdichteschwankungen bei $\bar{\omega} \approx 2\Omega_1$ (Kombinationsstreuung). Es ergibt sich für die

¹⁷ J. E. DRUMMOND, Plasma Physics, McGraw-Hill, New York 1961.

RAYLEIGH-Streuung

$$I(\Omega_1) (GZ) = \frac{1}{12\pi} \frac{U^2}{8\pi} V \frac{\omega_{pe}^4}{n_0 c^3} n(\Omega_1) \quad (101)$$

und für die
Kombinationsstreuung

$$I(\tilde{\omega}) (GZ) = \frac{1}{12\pi} \frac{U^2}{8\pi} V \frac{\omega_{pe}^4}{n_0 c^3} \cdot \left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega_{pe}} \right)^2 \left(\frac{v_T}{v_{ph}} \right)^2 n(\tilde{\omega}), \quad \tilde{\omega} \approx 2\Omega_1. \quad (102)$$

$n(\omega)$ ist der jeweilige Brechungsindex der elektromagnetischen Wellen. (101) unterscheidet sich von der entsprechenden Formel (92) – Faktoren der Größenordnung 1 bleiben unberücksichtigt – darin, daß in (92) der Brechungsindex quadratisch auftritt. Dieser Unterschied wird für $\Omega_1 \rightarrow \Omega_p$ wichtig. Um von (102) zu (63) zu gelangen, muß der Faktor $v_T^2 v_{ph}^{-2}$ in (102) durch $v_T^2 c^{-2}$ ersetzt werden. Die konstanten Faktoren in den beiden Formeln unterscheiden sich nicht in den Größenordnungen; der Brechungsindex tritt in (63) in der vierten Potenz auf, was jedoch gegenüber (102) wegen der hohen Frequenz unwesentlich ist.

TERASHIMA und YAJIMA¹⁰ haben, vom Teilchenbild ausgehend, versucht, das Modell von GINZBURG und ZHELEZNIakov⁹ durchzurechnen. In dieser Arbeit werden direkt die mittleren Intensitäten in ihrer Winkelabhängigkeit berechnet. Bei der Frequenz Ω_1 ergibt sich eine Dipolstrahlung, überlagert von einer schwachen, für das folgende nicht wesentlichen Quadrupolstrahlung. Für die Emission bei $\tilde{\omega} \approx 2\Omega_1$ ergibt sich eine reine Quadrupolstrahlung. Eine Integration über den Raumwinkel liefert für die

RAYLEIGH-Streuung

$$I(\Omega_1) (TY) = \frac{1}{12\pi} \frac{\omega_{pe}^4}{n_0 c^3} V \frac{v_T}{v_{ph}} \frac{U^2}{8\pi} \quad (103)$$

und für die
Kombinationsstreuung

$$I(\tilde{\omega}) (TY) = \frac{4}{5\pi} \frac{U^2}{\sqrt{3} 8\pi} V \frac{\omega_{pe}^4}{n_0 c^3} \left(\frac{v_T}{c} \right)^2. \quad (104)$$

Wegen $n(\Omega_1) \approx v_T/v_{ph}$ stimmt (103) mit (101) praktisch überein, unterscheidet sich also von (92) wieder um den Faktor $n(\Omega_1)$. (104) enthält wie (63) den Faktor $(v_T/c)^2$. Der Brechungsindex sowie andere, von $\tilde{\omega}$ abhängige Faktoren fehlen. Diese sind jedoch wegen $\tilde{\omega} \approx 2\Omega_1$ insgesamt von der Größenordnung 1.

TIDMAN und DUPREE¹⁸ betrachten die von einem Plasma emittierte Bremsstrahlung, die aus einem

Stoßanteil und einem Wellenanteil besteht. Die Frequenzen der Radiostrahlung liegen für den Wellenanteil bei ω_{pe} und $2\omega_{pe}$. Im thermodynamischen Gleichgewicht verhalten sich die Intensitäten bei diesen Frequenzen größenordnungsmäßig wie $(c/v_T)^2$, was in etwa mit dem in (100) dargestellten Verhältnis übereinstimmt.

Die Formeln von STURROCK et al.¹¹ liegen noch nicht soweit ausgerechnet vor, daß ein Vergleich möglich wäre.

Die „nichtlinearen Theorien“, in denen der Zerfall einer nichtlinearen Plasmaelektronenwelle betrachtet wird, sind dadurch gekennzeichnet, daß sie keine Strahlung der Frequenz $\Omega_1 \approx \omega_{pe}$ liefern.

LARENZ⁵ untersucht einen Plasmawellenimpuls mit einer charakteristischen Länge β . Die elektromagnetische Strahlung wird in einem Frequenzband der Breite $\Delta\omega = 2,5 v_T^2/\beta^2 \omega_{pe}$ ausgesandt. Die gesamte pro sec abgestrahlte Energie A ergibt sich mit den Formeln (10) und (11) der zitierten Arbeit zu:

$$A = N r^2 \int_{-\infty}^{+\infty} S dt d\Omega = \frac{9\sqrt{3}}{2^5} \frac{\omega_{pe}^3 \beta^6}{n_0 m c^5} N (\nabla\Phi)^4. \quad (105)$$

Hierbei ist N die Anzahl der Impulse pro sec, $(\nabla\Phi)$ die charakteristische Feldstärke eines Impulses. (105) unterscheidet sich von (63) vor allem in 2 Punkten:

- Die pro sec abgestrahlte Energie ist dem Quadrat der Energiedichte proportional.
- In (63) tritt mit der Energiedichte der einfallenden Welle nur eine unbekannte Größe auf. In (105) dagegen ist neben der Energiedichte auch die Zahl der Impulse pro sec unbekannt. Die Wahl von N beeinflusst die Intensität entscheidend.

Da wegen des zusätzlichen Parameters N in (105) ein direkter Vergleich mit (63) nicht möglich ist, vergleichen wir die Streukoeffizienten, die ein direktes Maß für die Wirksamkeit der Mechanismen sind. Die Energie eines Impulses ergibt sich mit Formel (11 a) der zitierten Arbeit zu

$$U_{LA} = (1/8\pi) \int (\text{grad } \Phi)^2 dV = \frac{5}{16} \sqrt{2\pi} (\nabla\Phi)^2 \beta^3. \quad (106)$$

$$\sigma_{LA} = \frac{A/N}{U_{LA}} = \frac{9\sqrt{3}}{10\sqrt{2\pi}} \frac{\omega_{pe}^3}{n_0 c^3} \left(\frac{v_T}{c} \right)^2 \frac{(\nabla\Phi)^2}{\kappa T} \lambda_D^3 \left(\frac{\beta}{\lambda_D} \right)^3$$

¹⁸ D. A. TIDMAN u. T. H. DUPREE, Phys. Fluids **8**, 1860 [1965].

Betrachten wir andererseits die Streuung einer ebenen Plasmawelle mit einer elektrischen Feldamplitude $U = \nabla \Phi$ an thermischen Schwankungen, so ist der Streukoeffizient für Emission bei $2\omega_{pe}$ durch (71) bzw. (72) gegeben. Bei Vernachlässigung des Dipolterms erhalten wir mit $\Omega_p \approx \Omega_1 \approx \omega_{pe}$

$$\frac{\sigma_{LA}}{\sigma(2\Omega_1)} \approx \frac{9\sqrt{6}\pi}{4} \left(\frac{v_T}{v_{ph}}\right) \left(\frac{\beta}{\lambda_D}\right)^3 \frac{(\nabla \Phi)^2}{\kappa T} \lambda_D^3 \frac{\lambda_D}{L}.$$

Wählt man mit LARENZ $\beta \approx 5\lambda_D$ und schätzt man $\nabla \Phi = \psi/\lambda_D$ ab (ψ = charakteristisches Potential des Impulses), so folgt, wenn $v_{ph} = v_{ph}(\beta)$ gesetzt wird:

$$\sigma_{LA}/\sigma(2\Omega_1) \approx 8 \cdot 10^3 (e\psi/\kappa T)^2 N_D (\lambda_D/L).$$

Hergeleitet wurde (63) unter der Bedingung $\chi = e\psi/\kappa T \ll 1$ (vgl. 16). Da LARENZ ebenfalls nur quadratische Glieder berücksichtigt, geht (16) in gleicher Weise in (105) ein. Beschränkt man sich auf diesen Gültigkeitsbereich, so folgt mit $\chi = 0,1$, $L = 10^{10}$ cm und der Tab. 1 für die Sonnenkorona

$$\sigma_{LA}/\sigma(2\Omega_1) \approx 1.$$

Für $\chi \ll 1$ ist also die Streuung an thermischen Schwankungen nicht effektiver als der Zerfall einer nichtlinearen Welle.

In diesem Zusammenhang soll noch kurz auf die Frage höherer Harmonischer eingegangen werden. Die nichtlineare Theorie (wie z. B. bei LARENZ⁵⁾) liefert Emission bei $2\omega_{pe}$ sowie — bei Berücksichtigung von Gliedern höherer Ordnung — bei $3\omega_{pe}$ etc. Emission bei ω_{pe} tritt nicht auf. Die Streuung von Plasmawellen an thermischen Schwankungen

scheint dagegen nur Emission bei ω_{pe} und $2\omega_{pe}$ aufzuweisen, so daß das Ausbleiben höherer Harmonischer in solaren Bursts vom Typ II und III eine natürliche Erklärung finden würde (WILD, SMERD und WEISS¹, p. 362). Die vorliegende Arbeit zeigt jedoch, daß auch bei der Streuung an thermischen Schwankungen höhere Harmonische auftreten können. Denn sobald man in dem Quellterm der Grundgleichung (10), der ja nach dem Parameter

$$\chi = e\psi/\kappa T$$

entwickelt wurde, nicht nur quadratische Glieder berücksichtigt, tritt auch Emission bei $3\omega_{pe}$, $4\omega_{pe}$ etc. auf. Andererseits zeigt sich, daß sowohl Rotation wie auch Divergenz des der jeweiligen Frequenz entsprechenden Quellterms nicht verschwinden. Also müssen auch Plasmawellen mit Frequenzen bei $3\omega_{pe}$, $4\omega_{pe}$ etc. entstehen. Aus der Dispersionsrelation $\Omega_k^2 = \frac{1}{2}\omega_{pe}^2(1 + \sqrt{1 + 12(k\lambda_D)^2})$ ergeben sich zugehörige Wellenlängen $\lambda \lesssim \lambda_D$. In diesem Bereich kann man von Plasmawellen, die ja ein kollektives Phänomen sind, nicht mehr sprechen, so daß man die Bedeutung dieser Quellterme näher untersuchen müßte.

Herrn Prof. Dr. E. RICHTER danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele Hinweise und Ratschläge sehr herzlich. Herrn Prof. Dr. A. UNSÖLD bin ich für die Bereitstellung eines Arbeitsplatzes und für sein freundliches, förderndes Interesse zu Dank verpflichtet. Der Stiftung Volkswagenwerk danke ich für ein Stipendium, das die Durchführung dieser Arbeit ermöglichte.